PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

SYAFRINA
10854004261

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*

SYAFRINA
10854004261

Tanggal Sidang	:	30 Mei 2013
Tanggal Wisuda	:	2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem Persamaan Linear (SPL) dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks $AX = Y$. Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan real, ada yang berbentuk bilangan kompleks dan ada yang berbentuk bilangan *fuzzy* . Pada penulisan ini, sistem persamaan linear yang digunakan adalah sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks dan dengan konstanta bilangan *fuzzy* kompleks serta nilai keanggotaan *fuzzy* segitiga, sehingga disebut sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks. Sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*. Metode dekomposisi *QR* merupakan suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks *A* menjadi matriks *Q* dan *R*, dengan *Q* adalah matriks yang vektor kolomnya merupakan basis ortonormal dan *R* adalah matriks segitiga atas. Berdasarkan pembahasan solusi u dari sistem persamaan disebut solusi *fuzzy* kuat karena $\underline{u}_i = \underline{x}_i$, $\overline{u}_i = \overline{x}_i$, dan jika terdapat salah satu yang tidak sama maka u adalah solusi *fuzzy* lemah.

Katakunci: basis ortonormal, SPL *fuzzy* kompleks, d*ekomposisi QR*, solusi *fuzzy* kuat, solusi *fuzzy* lemah.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda (alm) dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Bapak M. Soleh, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, Mei 2013

Syafrina

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu permasalahan pada bidang aljabar linear adalah menyelesaikan suatu sistem persamaan $AX = Y$, untuk suatu matriks A serta vektor X dan Y (Lipschutz, S, 2006). Sistem persamaan linear merupakan sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari koefisien dan variabel. Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan real, bilangan kompleks dan ada yang berbentuk bilangan *fuzzy*.

Sistem persamaan linear yang berkoefisien bilangan real telah banyak dipelajari atau dibahas di dalam perkuliahan, sedangkan sistem persamaan linear yang berkoefisien bilangan kompleks dan *fuzzy* baru berkembang sejak beberapa tahun belakangan ini. Secara bahasa, *fuzzy* diartikan "*kabur*". Bentuk umum dari sistem persamaan linear *fuzzy* adalah $A\tilde{X} = \tilde{Y}$. Sistem persamaan linear *fuzzy* ini unsur $\tilde{Y}$masih dalam bentuk parameter yang berada pada interval tertentu. Untuk menyatakan hal tersebut maka digunakan teori himpunan *fuzzy*.

Salah satu metode yang umum digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear adalah dengan melakukan serangkaian operasi kolom atau baris elementer untuk membawa matriks A menjadi bentuk eselon tereduksi. Selain cara tersebut, dapat pula digunakan cara memfaktorkan matriks A menjadi $A = LU$ untuk suatu matriks L dan matriks U. Dengan demikian sistem persamaan akan berubah menjadi $AX = LU\ X = Y$, dengan L adalah matriks segitiga bawah dan U adalah matriks segitiga atas. Teknik pemfaktoran tersebut dinamakan dekomposisi matriks. Beberapa jenis dekomposisi matriks lainnya adalah seperti; dekomposisi nilai singular, dekomposisi Cholesky dan dekomposisi *QR*.

Dekomposisi *QR* merupakan cara memfaktorkan matriks A menjadi $A = QR$ untuk suatu matriks Q dan matriks R. Dengan demikian sistem persamaan akan berubah menjadi $AX = QR\ X = Y$, dengan Q adalah matriks yang vektor kolomnya merupakan basis ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas. Metode dekomposisi tersebut tidak hanya digunakan untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linear, tetapi juga dapat digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan linear kompleks, dan solusi sistem persamaan linear *fuzzy*.

Penyelesaian persamaan linear *fuzzy* sudah dibahas sebelumnya pada jurnal Beta Norita yang berjudul "*Sistem Persamaan Linear Fuzzy*" pada tahun 2008. Pada tahun 2008, M. Matinfar dkk membahas penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* menggunakan metode dekomposisi *QR* di jurnalnya yang berjudul "*Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Householder Decomposition Method*", sedangkan jurnal Taher Rahgooy dkk membahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks yang berjudul "*Fuzzy Complex System of Linear Equations Applied to Circuit Analysis*" di tahun 2009.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk menggunakan dekomposisi *QR* dalam menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks. Sehingga pada Tugas Akhir ini penulis melakukan penelitian dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi *QR*".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka dirumuskan suatu masalah yaitu bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks menggunakan metode dekomposisi *QR*.

1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat, maka diperlukan adanya pembatasan masalah, diantaranya:

1. Matriks yang digunakan adalah matriks bujur sangkar 2×2 dan 3×3
2. Sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dengan m persamaan dan n variabel dibatasi untuk $m = n = 2$ dan $m = n = 3$ karena *output* matriks yang akan dihasilkan nantinya berupa matriks $2n \times 2n$ setelah mengalami proses

pembentukan matriks *kompleks* dan berupa matriks $4n \times 4n$ setelah mengalami proses pembentukan matriks *fuzzy* kompleks.

3. Sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks yang digunakan adalah sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks yang berkoefisien bilangan kompleks penuh dengan bentuk kompleks $x + iy$ dengan $x, y \neq 0$ dan berkonstanta bilangan *fuzzy* kompleks.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah memperoleh solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks menggunakan metode dekomposisi *QR*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Mengembangkan wawasan untuk mengkaji suatu permasalahan aljabar linear khususnya dalam hal menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.
2. Memberikan kontribusi kepada pembaca dalam menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks menggunakan dekomposisi *QR*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini bersisi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang sistem persamaan linear, sistem persamaan linear kompleks, sistem persamaan linier *fuzzy*, sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks, vektor, *gram-schmit*, dan dekomposisi *QR*.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana metode dekomposisi *QR* dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab II ini membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk pembahasan selanjutnya yaitu tentang sistem persamaan linear, bilangan kompleks, konjugat kompleks, matriks kompleks, sistem persamaan linear kompleks, himpunan *fuzzy*, persamaan linear *fuzzy*, sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks, vektor dan dekomposisi *QR*.

2.1 Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear memiliki peranan penting dalam bidang aljabar linear. Aljabar linear sering dihadapkan pada persoalan untuk mencari penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear. Secara umum sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk $AX = Y$ dengan $A = \quad a_{mn}$ adalah matriks koefisien, $X = \quad x_n$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan $Y = \quad y_m$ adalah vektor kolom dari kostanta.

Definisi 2.1 (Marc Lipson, 2006): Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari m persamaan linear $(L_1, L_2, \dots, L_m)$, dengan n variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$, dapat disusun dalam bentuk:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \tag{2.1}$$

dengan a_{mn} merupakan koefisien dari variabel x_n yang tidak diketahui dan y_m adalah kostanta dari persamaan L_m dimana x_n merupakan variabel yang akan dicari.

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel tidak diketahui ekuivalen dengan persamaan matriks,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \qquad (2.2)$$

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) disebut sebagai sistem persamaan linear homogen jika semua koefisien konstantanya adalah nol, yaitu jika $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_m = 0$. Sebaliknya, sistem persamaan linear disebut sistem persamaan linear nonhomogen, jika $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0, \ldots, y_m \neq 0$. Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) dikatakan konsisten jika memiliki satu atau lebih solusi, dan tidak konsisten jika tidak memiliki solusi.

Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear.

Contoh 2.1 :

Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 13x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear yang diberikan akan diselesaikan dengan cara operasi baris elementer (OBE) sebagai berikut:

1. Baris kedua dikurang dengan baris pertama

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 3 & b_2 - b_1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 & \end{matrix}$$

2. Baris ketiga dikurang dengan 2 kali baris pertama

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \\ 0 & 1 & 3 & 2 & b_3 - 2b_1 \\ 2 & 6 & 13 & 5 & \end{matrix}$$

3. Baris pertama dikurang dengan 2 kali baris kedua

   Baris ketiga dikurang dengan 2 baris kedua

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & b_1 - 2b_2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & b_2 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & b_3 - 2b_2 \end{matrix}$$

4. Matriks hasil

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan linear di atas adalah: $x_1 = -6$, $x_2 = 5$, dan $x_3 = -1$.

2.2 Sistem Persamaan Linear Kompleks

2.2.1 Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan kompleks dilambangkan dengan *C*. Dalam bilangan kompleks, notasi i biasa digunakan sebagai lambang dari $\sqrt{-1}$ sehingga $i^2 = -1$. Bilangan kompleks pada awalnya didefinisikan sebagai pasangan bilangan real (x, y), namun secara umum, notasi bilangan kompleks adalah $z = x + iy$ yang dilambangkan dengan titik (x, y) yang merupakan kombinasi antara bilangan real dan imajiner. Bilangan x merupakan bagian real dari z, dinotasikan dengan $x = Re(z)$ dan nilai y merupakan bagian imajiner dari z, dinotasikan dengan $y = Im(z)$.

2.2.2 Konjugat Kompleks

Konjugat bilangan kompleks $z = x + iy$, didefinisikan sebagai $\bar{z} = \bar{x} + \overline{iy} = x - iy$, sedangkan modulus dan norma vektor dari bilangan kompleks z didefinisikan sebagai $|z|^2 = z\bar{z}$ dan untuk $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ (Erwin Sucipto, 1987).

Berikut akan diberikan contoh menentukan konjugat kompleks dan norma vektor dari bilangan kompleks.

Contoh 2.2:

Tentukan konjugat kompleks, hasil perkalian bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya dan norma vektor dari bilangan kompleks berikut:

$$z = \frac{2 - 3i}{4 + i}$$

1) Menentukan konjugat kompleks dari bilangan kompleks

Dari bilangan kompleks yang diberikan akan ditentukan konjugat kompleksnya sebagai berikut:

$$z = \frac{2 - 3i\ (4 - i))}{4 + i\ (4 - i)}$$

$$= \frac{8 - 2i - 12i + 3i^2}{16 - 4i + 4i - i^2}$$

$$= \frac{8 - 14i - 3}{16 + 1}$$

$$= \frac{11 - 14i}{17}$$

$$= \frac{11}{17} - \frac{14i}{17}$$

2) Menentukan norma vektor dari bilangan kompleks

Selanjutnya akan ditentukan norma vektor dari bilangan kompleks yang diketahui.

Diberikan bilangan kompleks

$$z = \frac{2 - 3i}{i + 4}$$

Maka norma vektor dari bilangan kompleks z adalah:

$$\|z\| = \overline{|z|^2}$$

$$= \sqrt{z\bar{z}}$$

$$= \overline{\frac{2 - 3i}{i + 4} \quad \frac{11}{17} - \frac{14i}{17}}$$

$$= \overline{\frac{22 - 28i - 33i + 42i^2}{68 + 17i}}$$

$$= \overline{\frac{64 - 61i}{68 + 17i}}$$

2.2.3 Matriks Kompleks

Matriks kompleks yaitu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. Misalkan A adalah suatu matriks kompleks, jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, seperti yang telah dijelaskan pada konjugat kompleks sebelumnya maka $\bar{z} = x - iy$ adalah konjugat kompleksnya. Konjugat dari matriks kompleks A ditulis sebagai $\bar{A}$, adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara menghitung konjugat dari setiap entri A.

Operasi transpose untuk matriks kompleks A dinotasikan sebagai A^H, yaitu

$A^H = (\bar{A})^T$

(Beberapa literatur menggunakan A^* sebagai ganti A^H).

Berikut akan diberikan contoh untuk transpose konjugat suatu matriks.

Contoh 2.3:

Tentukan transpos konjugat dari matriks berikut ini!

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 + i & 2 \\ 3 & 4i & 3i \end{matrix}$$

Penyelesaian:

1) Mencari konjugat dari matriks A

   Dari matriks A yang diberikan maka diperoleh konjugat matriks A adalah

$$\bar{A} = \begin{matrix} 2 & 1 - i & 2 \\ 3 & -4i & -3i \end{matrix}$$

2) Mencari transpos konjugat dari matriks A

   Dari konjugat matriks A yang telah diperoleh maka akan ditentukan transpos konjugat matriks A adalah

$$A^H = (\bar{A})^T = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 - i & -4i \\ 2 & -3i \end{matrix}$$

2.2.3 Sistem Persamaan Linear Kompleks

Sistem persamaan linear kompleks merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien atau konstantanya adalah bilangan kompleks. Berikut akan diberikan contoh untuk penyelesaian sistem persamaan linear kompleks.

Contoh 2.4:

Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \ \ 1 + i\ \ x_2 & & = 1 - 2i \\ ix_1 - x_2 & + ix_3 & = 2 \\ -1 + i\ \ x_1 - x_2 & - x_3 & = 2 + 3i \end{array}$$

Penyelesaian:

Dari sistem persamaan linear kompleks yang diberikan, akan ditentukan solusi nilai x dengan cara operasi baris elementer (OBE) sebagai berikut:

1. Baris kedua dikurang dengan i kali baris pertama

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & 0 & 1-2i \\ i & -1 & i & 2 \\ -1+i & -1 & -1 & 2+3i \end{array} \quad b_2 - ib_1$$

2. Baris ketiga dikurang dengan $-1 + i$ kali baris pertama

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & 0 & 1-2i \\ 0 & -i & i & -i \\ -1+i & -1 & -1 & 2+3i \end{array} \quad b_3 - \ -1 + i\ b_1$$

3. Baris kedua dikali dengan i

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & 0 & 1-2i \\ 0 & -i & i & -i \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad b_2 \times i$$

4. Baris pertama dikurang dengan $(1 + i)$ baris kedua

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1+i & 0 & 1-2i \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad b_1 - \ 1 + i\ b_2$$

5. Baris ketiga dikurang dengan baris kedua

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1+i & -3i \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad b_3 - b_2$$

6. Matriks hasil

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1+i & -3i \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Misalkan $x_3 = t$, maka diperoleh solusi dari sistem persamaan linear di atas dengan $x_1 = -3i - \ 1 + i\ t$, dan $x_2 = 1 + t$.

2.3 Sistem Persamaan Linear *Fuzzy*

2.3.1 Himpunan *Fuzzy*

Secara bahasa *fuzzy* dapat diartikan kabur atau semu. Himpunan *fuzzy* pertama kali dibahas oleh Lotfi A. Zadeh 1965. Himpunan *fuzzy* merupakan kumpulan dari entri-entri dengan suatu rangkaian tingkat keanggotaan.

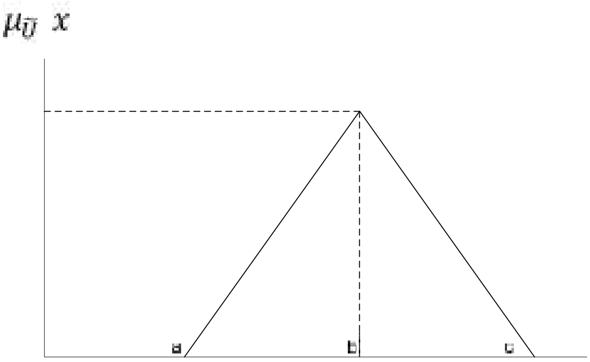
Untuk mengatasi permasalahan himpunan *fuzzy*, Zadeh mengaitkan himpunan *fuzzy* dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan *fuzzy*. Fungsi tersebut disebut *fungsi keanggotaan* dan nilai fungsi itu disebut *derajat keanggotaan* suatu unsur dalam himpunan *fuzzy*. Himpunan ini dicirikan dengan fungsi keanggotaan yang menegaskan suatu tingkatan (*grade*) keanggotaan yang bernilai 0 dan 1, dari penjelasan tersebut dapat dikatakan bahwa nilai keanggotaan pada *fuzzy* terletak pada interval [0,1].

Misalkan X adalah suatu himpunan semesta, kemudian himpunan bagian *fuzzy* U dari X adalah himpunan bagian dari X yang keanggotaannya didefenisikan melalui fungsi keanggotaan sebagai $\mu_{\tilde{U}}(x) : X \rightarrow [0,1]$.

Himpunan *fuzzy* U dalam semesta X, dapat dinotasikan dalam bentuk $\tilde{U} = \{(x, \mu_{\tilde{U}}(x))|x \in X\}$ dengan $\mu_{\tilde{U}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* $\tilde{U}$, pada penulisan ini menggunakan fungsi keanggotaan segitiga. Fungsi keanggotaan segitiga ditandai dengan tiga parameter yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut. Persamaan untuk fungsi keanggotaan segitiga ini adalah sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \mu_{\tilde{U}}(x, a, b, c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ (c-a)/(c-b), & b \leq x \leq c \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.3}$$

Kurva yang dibentuk oleh fungsi keanggotaan segitiga pada persamaan 2.3 merupakan gabungan antara dua garis linear, untuk lebih jelas berikut adalah grafik fungsi keanggotaan segitiga:



Gambar 2.1. Grafik fungsi keanggotaan segitiga $\mu_{\bar{U}}(x, a, b, c)$

Menurut Beta Norita (2008) menjelaskan tentang definisi bilangan *fuzzy* (u) di dalam R sebagai pasangan fungsi $\underline{u}, \overline{u}$ yang memenuhi sifat sebagai berikut:

1) Fungsi $\underline{u}$ monoton naik, terbatas dan kontinu kiri pada [0,1]
2) Fungsi $\overline{u}$ monoton turun, terbatas dan kontinu kanan pada 0,1
3) $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ untuk setiap r dalam 0,1 .

Himpunan bilangan-bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan *U*, untuk setiap bilangan *fuzzy* $u \in U$ ditulis dalam bentuk parameter $u = \underline{u}, \overline{u}$. Menurut P. Mansouri dan B. Asady (2011) operasi aljabar bilangan *fuzzy* untuk setiap $u = \underline{u}\ r\ ,\ \overline{u}\ r$ dan $y = \underline{y}\ r\ ,\ \overline{y}\ r\ \in U$ dan bilangan real k didefinisikan sebagai berikut:

1) $u + y = (\underline{u}\ r\ + \underline{y}\ r\ , \overline{u}\ r\ + \overline{y}\ r\ )$
2) $u = y$ jika dan hanya jika $\underline{u} = \underline{y}$ dan $\overline{u} = \overline{y}$
3) $ku = k\underline{u}, k\overline{u}$ untuk $k \geq 0$ dan $ku = k\overline{u}, k\underline{u}$ untuk $k < 0$

2.3.2 Sistem Persamaan Linear *Fuzzy*

Sistem persamaan linear *fuzzy* merupakan suatu sistem persamaan linear yang berparameter *fuzzy* atau semu yang berada pada interval tertentu. Bentuk umum dari sistem persamaan linear *fuzzy* adalah $A\tilde{X} = \tilde{Y}$ (2.4)

Model sistem persamaan linear *fuzzy* dapat dijelaskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_1 \\
a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{2n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_m
\end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n \in F$ dan $a_{i,j} \in R$ untuk $1 \leq i, j \leq n$.

Sistem persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, dengan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Definisi 2.2 (Allahviranloo, 2006): Suatu vektor bilangan *fuzzy* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ dengan diberikan $x_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $r = [0, 1]$ disebut penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* jika memenuhi :

$$\begin{aligned}
\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} &= \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y}_i \\
\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} &= \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \overline{y}_i
\end{aligned} \tag{2.7}$$

untuk sebarang persamaan $\underline{y}_i$ dan $\overline{y}_i$ merupakan kombinasi linear dari $\underline{x}_j$ dan $\overline{x}_j$. Akibatnya, untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear (2.7), maka langkah awal yang harus dilakukan adalah mengubah koefisien matriks A yang berukuran $n \times n$ menjadi koefisien matriks yang berukuran $2n \times 2n$ dengan kolom sebelah kanan merupakan vektor $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \cdots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n)^T$.

Persamaan (2.7) dengan $(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)^T$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ adalah variabel yang tidak diketahui dan $(\underline{y}_1, \cdots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_n)^T$ adalah ruas sebelah kanan, sehingga diperoleh persamaan linear *fuzzy* yang baru. Menurut M. Matinfar, dkk (2008) sistem persamaan linear *fuzzy* baru dapat dijelaskan sebagai berikut yaitu :

$$
\begin{array}{lllll}
S_{11}\underline{x}_1 + \cdots + S_{1n}\underline{x}_n & + S_{1,n+1}\,\overline{x}_2 & + \cdots + S_{1,2n}\,\overline{x}_n & = \underline{y}_1 & \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
S_{n1}\underline{x}_1 + \cdots + S_{nn}\underline{x}_n & + S_{n,n+1}\,\overline{x}_2 & + \cdots + S_{n,2n}\,\overline{x}_n & = \underline{y}_n & \\
S_{n+1,1}\underline{x}_1 + \cdots + S_{n+1,n}\underline{x}_n & + S_{n+1,n+1}\,\overline{x}_2 & + \cdots + S_{n+1,2n}\,\overline{x}_n & = \overline{y}_1 & (2.8) \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
S_{2n,1} + \cdots + S_{2n,n} & + S_{2n,n+1}\,\overline{x}_2 & + \cdots + S_{2n,2n}\,\overline{x}_n & = \overline{y}_n &
\end{array}
$$

Jika pada persamaan (2.6) matriks koefisien berbentuk $A = (a_{ij})$ untuk $i, j = 1, 2, \cdots, n$, maka untuk menentukan entri s_{ij} ditentukan dengan ketentuan sebagai berikut :

$$
S \begin{cases} s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, & a_{ij} \geq 0 \\ s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}, & a_{ij} < 0 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases} \tag{2.9}
$$

Selanjutnya persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$
S\tilde{X} = \tilde{Y} \tag{2.10}
$$

dengan,

$$
S = \begin{pmatrix} S_1 \geq 0 & S_2 \leq 0 \\ S_2 \leq 0 & S_1 \geq 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{pmatrix}
$$

dan,

$$
\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r) \end{pmatrix} \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(r) \end{pmatrix} \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r) \end{pmatrix} \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{y}_n(r) \end{pmatrix}
$$

sehingga

$$
S_1\underline{X} + S_2\overline{X} = \underline{Y}
$$

$$
S_2\underline{X} + S_1\overline{X} = \overline{Y}
$$

Diketahui $X = \{(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ adalah penyelesaian tunggal dari $S\tilde{X} = \tilde{Y}$. Jika $(\underline{y}_i(r), \overline{y}_i(r))$ merupakan fungsi linear pada r, maka ruang vektor bilangan *fuzzy* adalah $u = (\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r)), i = 1, 2, \cdots, n$ didefinisikan oleh :

$$\underline{u}_i(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1)\}$$
$$\overline{u}_i(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1)\}$$

disebut solusi *fuzzy* dari $S\tilde{X} = \tilde{Y}$ jika $(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$ adalah semua bilangan *fuzzy* untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Pada solusi *fuzzy*, u disebut solusi *fuzzy* kuat (*strong fuzzy solution)* jika $\underline{u}_i = \underline{x}_i$ dan $\overline{u}_i = \overline{x}_i$, akan tetapi jika terdapat salah satu yang tidak sama maka u adalah solusi *fuzzy* lemah (*weak fuzzy solution*).

Berikut akan diberikan contoh mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* ke dalam matriks koefisien S. Matriks A yang berukuran 2×2 akan diubah menjadi matriks S yang berukuran $2n \times 2n$ sehingga didapat sistem persamaan linear baru.

Contoh 2.5:

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= \tilde{y}_2 \end{aligned}$$

Tentukanlah sistem persamaan liner *fuzzy* baru!

Penyelesaian:

Langkah-langkah dalam penyelesaian adalah sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* kedalam bentuk matriks seperti pada persamaan (2.6):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$$

2. Mengubah matriks A menjadi matriks S berdasarkan ketentuan (2.9)

   Untuk $s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, \quad a_{ij} \geq 0$

   Nilai s_{ij} untuk $i = 1,2, \quad j = 1,2$ berturut-turut dan $n = 2$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{11} = 1, s_{11} = 1, s_{33} = 1$$
$$a_{21} = 1, s_{21} = 1, s_{43} = 1$$
$$a_{22} = 3, s_{22} = 3, s_{44} = 3$$

Untuk $s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}, \quad a_{ij} < 0$

Nilai s_{ij} untuk $i = 1$, $j = 2$ berturut-turut dan $n = 2$ diperoleh sebagai berikut:

$a_{12} = -1, s_{14} = -1, s_{32} = -1$

Dan $s_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

Sehingga diperoleh matriks S sebagai berikut:

$$S = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Matriks S akan diubah menjadi sistem persamaan linear *fuzzy* baru dengan melakukan operasi pada persamaan (2.10), maka diperoleh:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{matrix}$$

Jadi, diperoleh persamaan linear *fuzzy* baru sebagai berikut:

$$\begin{array}{llllll} \underline{x}_1 & & & & -\overline{x}_2 & = \underline{y}_1 \\ \underline{x}_1 & +\ 3\underline{x}_2 & & & & = \underline{y}_2 \\ & -\ \underline{x}_2 & + & \overline{x}_1 & & = \overline{y}_1 \\ & & & \overline{x}_1 & +\ 3\overline{x}_2 & = \overline{y}_2 \end{array}$$

2.4 Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Kompleks

Bilangan *fuzzy* kompleks pada penulisan ini menggunakan dua bilangan *fuzzy* yang mewakili nyata dan imajiner, bentuk dari bilangan *fuzzy* kompleks sebagai berikut:

$\tilde{Z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, dimana

$\tilde{x} = \underline{x}_i\ r\ , \overline{x}_i\ r$

$\tilde{y} = \underline{y}_i\ r\ , \overline{y}_i\ r$ dan $0 \leq r \leq 1$

dengan,

$\underline{Z} = \underline{x}(r) + i\underline{y}\ r$

$\overline{Z} = \overline{x}(r) + i\overline{y}\ r$

Taher Rahgooy, dkk (2009) mendefinisikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks sebagai berikut yaitu :

Definisi 2.3 (Taher Rahgooy, Vol. 1, No. 5 December, 2009):

$$
\begin{aligned}
c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n &= w_1 \\
c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n &= w_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\;\; \vdots \\
c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{mn}z_n &= w_m
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

dengan koefisian matriks $C = c_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ adalah matriks kompleks nxn dan w_i, $1 \leq i \leq n$ adalah bilangan *fuzzy* kompleks. Sistem ini disebut penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* jika memenuhi :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}z_j = w_i,$$

untuk, $i = 1,2, \ldots , n$

Dalam penyelesaian sistem ini menggunakan bilangan-bilangan kompleks sebagai berikut:

$$c_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$$

$$z_i = p_i + iq_i$$

$$w_i = u_i + iv_i$$

Sehingga penjabarannya dibentuk seperti:

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + ib_{ij})(p_j + iq_j) = u_i + iv_i \tag{2.12}$$

Untuk penyelesaian sistem ini, dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
V &= v_i \\
U &= u_i \\
A &= a_i \\
B &= b_i \\
P &= p_i \\
Q &= q_i \quad \text{untuk } i, j = 1,2, \ldots , n
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk matiks seperti berikut:

$$\begin{matrix} A & -B \\ B & A \end{matrix} \quad \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} = \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \tag{2.14}$$

2.5 Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai panjang dan arah. Vektor dapat diidentifikasi sebagai, $V = v_1, v_2, \dots, v_n$. Bilangan-bilangan v_i disebut *koordinat*, *komponen*, *entri*, atau *elemen* dari V. Berikut akan dijelaskan operasi-operasi yang berlaku untuk vektor-vektor yang akan digunakan dalam penggunaan dekomposisi *QR*.

2.5.1 Penjumlahan Vektor dan Perkalian Skalar

Perhatikan vektor berikut: $u = u_1, u_2, \dots, u_n$ dan $v = v_1, v_2. \dots, v_n$

Jumlah kedua vektor di atas ditulis $z + w$, dengan menjumlahkan komponen-komponen yang bersesuaian dari u dan v, yaitu:

$$u_1, u_2, \dots, u_n + v_1, v_2. \dots, v_n = u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n$$

$$u \; u_1, u_2, \dots, u_n = uu_1, uu_2, \dots, uu_n$$

sedangkan untuk hasil kali skalar dari vektor u dengan suatu bilangan real k, dapat ditulis sebagai ku, yang merupakan vektor dari mengalikan setiap komponen dari u dengan k, sehingga:

$$ku = k \; u_1, u_2, \dots, u_n = ku_1, ku_2, \dots, ku_n$$

2.5.2 Hasil Kali Titik (Hasil Kali Dalam)

Perhatikan sebarang vektor-vektor $u = u_1, u_2, \dots, u_n$ dan $v = v_1, v_2. \dots, v_n$. Hasil kali dalam (inner product) atau hasil kali skalar dari u dan v didefinisikan sebagai $u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$. Dengan kata lain $u.v$ diperoleh dengan cara mengalikan komponen-komponen yang bersesuaian dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh. Vektor-vektor u dan v dikatakan ortogornal (saling tegak lurus) jika hasil kali titiknya adalah nol, dengan kata lain $u.v = 0$.

2.5.3 Basis Ortonormal

Perhatikan himpunan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pada *C, S* dikatakan *ortogonal* jika setiap pasangan vektor dalam *S* adalah juga merupakan *ortogonal*, dan *S* akan dikatakan ortonormal jika *S* adalah *ortogonal*. Dengan kata lain jika *S ortogonal* maka *S* juga *ortonormal*.

Definisi 2.4. Basis Ortonormal (Wijna, 2007): Diketahui *V* ruang vektor atas *C*, dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan basis untuk *V*. Basis S disebut basis ortonormal jika dan hanya jika:

1) Setiap v_i merupakan vektor normal, dan
2) $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ untuk setiap *i , j* dengan *i* ≠ *j*.

2.6 Dekomposisi *QR*

Metode *QR* dapat diaplikasikan dalam menentukan solusi dari nilai x pada sistem persamaan linear *fuzzy*. Dekomposisi *QR* adalah proses pemfaktoran matriks A menjadi $A = QR$ untuk suatu matriks *Q* dan matriks *R*. Dengan demikian sistem persamaan akan berubah menjadi $Ax = QR\ x = y$, dengan *Q* adalah matriks vektor kolomnya basis ortonormal *Q* dan *R* adalah matriks segitiga atas.

Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear menggunakan dekomposisi *QR*, hal-hal yang harus diperhatikan adalah sebagai berikut:

1) *Input:* Matriks $A \in C^{m \times n}$ atas *R*

   Matriks A dimisalkan sebagai matriks yang dibentuk dari vektor-vektor kolom, yaitu $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, dengan $a_1 \in C^m$.
2) Dibentuk basis ortonormal $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ dari himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan menggunakan algoritma Gram-Schmit sebagai berikut:
   a) Dibentuk
   $$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \tag{2.15}$$
   b) Untuk $i = 2,3,4, \dots, n$ dibentuk:
   $$q_i = \frac{v_i - \langle q_1, v_i \rangle q_1 - \langle q_2, v_i \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i \rangle q_{i-1}}{v_i - \langle q_1, v_i \rangle q_1 - \langle q_2, v_i \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i \rangle q_{i-1}} \tag{2.16}$$

c) Jika $q_1 = 0$, maka pilih sebarang vektor $q \in C^m$ yang bukan merupakan kombinasi linier dari vektor $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ dan dibentuk:

$$q_i = \frac{q - \langle q_1, q\rangle q_1 - \langle q_2, q\rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, q\rangle q_{i-1}}{\| q - \langle q_1, q\rangle q_1 - \langle q_2, q\rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, q\rangle q_{i-1} \|} \quad (2.17)$$

d) Dibentuk matriks uniter $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$

e) Dibentuk matriks segitiga atas $R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}$

$$r_{ij} = \begin{cases} \langle q_i, v_j\rangle & , i < j \\ \| v_j - \langle q_1, v_j\rangle q_1 - \langle q_2, v_j\rangle q_2 - \cdots - \langle q_{j-1}, v_j\rangle q_{j-1} \| & , i = j \\ 0 & , i > j \end{cases} \quad (2.18)$$

3) *Output*: Matriks uniter *Q* dan matriks segitiga atas *R* sehingga $A = QR$ dalam notasi matriks adalah sebagai berikut:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [q_1, q_2, \dots, q_n] \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.5. (M. Matinfar, 2008): Jika $A = QR$ adalah dekomposisi *QR* dari A, maka cara penyelesaian sistemnya dari $Ax = y$ dapat dijelaskan sebagai: $\hat{x} = R^{-1}Q^T y$. (2.19)

Selanjutnya akan diberikan contoh penyelesaian suatu matriks menggunakan dekomposisi *QR*.

Contoh 2.6:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in C^{3x2}$, akan dicari bentuk dekomposisi *QR*.

Penyelesaian:

Matriks A dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks kolom $A = [a_1 \quad a_2]$, dengan:

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$, selanjutnya akan dicari matriks Q dan R sebagai berikut:

1) Karena $\|a_1\| = \sqrt{1^2 + i(-i) + 0} = \sqrt{2}$

Maka:

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Karena

$$a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan,

$$\|a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Maka,

$$q_2 = \frac{a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1}{\|a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1\|}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

3) Karena diperlukan satu vektor ortonormal lagi, maka dipilih vektor $q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in C^3$ dan vektor tersebut diortonormalkan.

Karena,

$$q - \langle q_1, q\rangle q_1 - \langle q_2, q\rangle q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}i}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6}{18} \\ \frac{6i}{18} \\ \frac{6}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{i}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

dan,

$$\| q - \langle q_1, q\rangle q_1 - \langle q_2, q\rangle q_2 \| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Maka:

$$q_3 = \frac{q - \langle q_{1,} q\rangle q_1 - \langle q_{2,} q\rangle q_2}{q - \langle q_{1,} q\rangle q_1 - \langle q_{2,} q\rangle q_2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Dari poin 1), 2), 3) dapat dibentuk matriks Q, yaitu:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Karena diperoleh,

$$\|a_1\| = \sqrt{2}$$

$$\langle q_1, a_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\|a_1 - \langle q_1, a_2 \rangle\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Maka dapat dibentuk matriks *R*, sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, diperoleh bentuk dekomposisi:

$$A = QR$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{6}i}{6} & \frac{\sqrt{3}i}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berikut akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Contoh 2.7 :

Gunakan Dekomposisi *QR* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 - x_2 = 2$$

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan (2.4) sistem persamaan yang diberikan dapat ditulis dalam bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{Y}$ seperti pada persamaan (2.6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks kolom $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, dengan:

$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $dan\ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, selanjutnya akan dicari matriks Q dan R sebagai berikut:

1) Karena $\|a_1\| \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ maka,

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

2) Karena,

$$a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1765 \\ -0{,}2942 \end{bmatrix}$$

$$a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 = \frac{5}{17}\sqrt{17}$$

$$q_2 = \frac{a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1}{a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17}\sqrt{17} \\ -\frac{1}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat dibentuk matriks *Q*, yaitu:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{4}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

Dan matriks *R*, sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{17} & \frac{-3}{17}\sqrt{17} \\ 0 & \frac{5}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari R^{-1} dan Q^T:

$$R^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{17}\frac{5}{17} \times \sqrt{17} - \frac{-3}{17}\sqrt{17 \times 0}} \begin{bmatrix} \sqrt{17} & \frac{-3}{17}\sqrt{17} \\ 0 & \frac{5}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{3}{85}\sqrt{17} \\ 0 & \frac{5}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{4}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.19) diperoleh solusi nilai $\hat{x}$ sebagai berikut:

$$\hat{x} = R^{-1}Q^T y = \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{3}{85}\sqrt{17} \\ 0 & \frac{5}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{17}\sqrt{17} & \frac{4}{17}\sqrt{17} \\ \frac{4}{17}\sqrt{17} & -\frac{1}{17}\sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, untuk $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan pada tugas akhir ini menggunakan metode studi literatur, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Terlebih dahulu diketahui sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks.
2) Mengubah persamaan ke dalam bentuk matriks $AX = Y$.
3) Mengubah matriks A ke dalam bentuk matriks $CZ = W$.
4) Membentuk matriks C menjadi matriks $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$.
5) Selanjutnya mengubah matriks C ke dalam bentuk matriks S dengan entri-entri dari S dapat ditentukan dengan ketentuan berikut:

$$S \begin{cases} s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, & a_{ij} \geq 0 \\ s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}, & a_{ij} < 0 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

6) Menentukan matriks uniter Q dengan cara algoritma Gram-Schmit berikut:

$$q_i = \frac{v_i - \langle q_1, v_i \rangle q_1 - \langle q_2, v_i \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i \rangle q_{i-1}}{\| v_i - \langle q_1, v_i \rangle q_1 - \langle q_2, v_i \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i \rangle q_{i-1} \|}$$

Apabila matriks C berukuran $m \times n$, maka diperlukan tambahan satu vektor ortonormal lagi.

7) Menentukan matriks segitiga atas R dengan menggunakan ketentuan berikut:

$$r_{ij} = \begin{cases} \langle q_i, v_j \rangle & , i < j \\ \| v_j - \langle q_1, v_j \rangle q_1 - \langle q_2, v_j \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{j-1}, v_j \rangle q_{j-1} \| & , i = j \\ 0 & , i > j \end{cases}$$

8) Membentuk matriks $S = QR$.
9) Melakukan operasi matriks $(QR)\,\tilde{x} = \tilde{y}$.
10) Menentukan solusi nilai $\tilde{x}$ dari operasi matriks $(QR)\,\tilde{x} = \tilde{y}$ dengan ketentuan $\hat{x} = R^{-1}Q^{T}\tilde{y}$.

11) Selanjutnya menentukan $\underline{u}_i(r) =$ min $\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$ dan $\overline{u}_i(r) =$ maks $\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$, untuk mengetahui kuat atau lemahnya solusi nilai $\hat{x}$.

12) Menggambarkan solusi nilai $\tilde{x}$ yang dipeoleh dengan fungsi keanggotaan *fuzzy* segitiga.

Langkah-langkah metode penelitian di atas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:

Mulai

↓

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks

↓

Mengubah persamaan ke dalam bentuk matriks $AX = Y$

↓

Mengubah matriks A ke dalam bentuk matriks $CZ = W$

↓

Membentuk matriks C menjadi matriks $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$

↓

Selanjutnya mengubah matriks C ke dalam bentuk matriks S dengan entri-entri dari S dapat ditentukan dengan ketentuan berikut:

$$S \begin{cases} s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, & a_{ij} \geq 0 \\ s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}, & a_{ij} < 0 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

↓

Menentukan matriks uniter Q dengan cara algoritma Gram-Schmit berikut:

$$q_i = \frac{v_i - \langle q_1, v_i\rangle q_1 - \langle q_2, v_i\rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i\rangle q_{i-1}}{\| v_i - \langle q_1, v_i\rangle q_1 - \langle q_2, v_i\rangle q_2 - \cdots - \langle q_{i-1}, v_i\rangle q_{i-1} \|}$$

Apabila matriks C berukuran $m \times n$, maka diperlukan tambahan satu vektorortonormal lagi.

↓

Menentukan matriks segitiga atas R dengan menggunakan ketentuan berikut:

$$r_{ij} = \begin{cases} \langle q_i, v_j \rangle & , i < j \\ v_j - \langle q_1, v_j \rangle q_1 - \langle q_2, v_j \rangle q_2 - \cdots - \langle q_{j-1}, v_j \rangle q_{j-1} & , i = j \\ 0 & , i > j \end{cases}$$

Membentuk matriks $S = QR$

Melakukan operasi matriks $(QR)\,\tilde{x} = \tilde{y}$

Menentukan solusi nilai $\tilde{x}$ dari operasi matriks $(QR)\,\tilde{x} = \tilde{y}$ dengan ketentuan $\hat{x} = R^{-1} Q^T \tilde{y}$

Selanjutnya menentukan $\underline{u}_i(r) = \min\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ dan $\overline{u}_i(r) = \text{maks}\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$, untuk mengetahui kuat atau lemahnya solusi nilai $\hat{x}$

Menggambarkan solusi nilai $\tilde{x}$ yang dipeoleh dengan fungsi keanggotaan *fuzzy* segitiga

Selesai

Gambar 3.1 *Flowchart* Metode Penelitian

BAB IV
PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI *QR*

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana metode dekomposisi *QR* dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks. Seperti yang telah diketahui bahwa sistem persamaan linear dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks $AX = Y$ dengan A merupakan matriks koefisien yang akan dicari bentuk *QR*-nya dan selanjutnya akan ditentukan solusi nilai $\tilde{x}$ dari sistem persamaannya.

Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Contoh 4.1: (untuk kasus $m = n = 2$) :

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks berikut:

$$(10 - 7.5i)X_1 - (6 - 5i)X_2 = (4 + r, 6 - r) + i(-1 + r, 1 - r)$$
$$-(6 - 5i)X_1 + (16 + 3i)X_2 = (-2 + r, -r) + i(-3 + r, -1 - r)$$

Selesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks di atas dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal di atas maka sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks tersebut dibentuk kedalam matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 10 - 7.5i & -6 + 5i \\ -6 + 5i & 16 + 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4 + r, 6 - r) + i(-1 + r, 1 - r) \\ (-2 + r, -r) + i(-3 + r, -1 - r) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditulis dalam bentuk matriks (2.13), sehingga diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7.5 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} (4 + r, 6 - r) \\ (-2 + r, -r) \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} (-1 + r, 1 - r) \\ (-3 + r, -1 - r) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengubah matriks A, B, P, Q, U dan V ke dalam bentuk matriks C pada persamaan (2.14)

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 7.5 & -5 \\ -6 & 16 & -5 & -3 \\ -7.5 & 5 & 10 & -6 \\ 5 & 3 & -6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4+r, 6-r) \\ (-2+r, -r) \\ -1+r, 1-r \\ -3+r, -1-r \end{bmatrix}$$

Menetukan matriks S dari matriks C berdasarkan ketentuan (2.9)

Untuk $s_{ij} = s_{i+n,j+n} = a_{ij}, \quad a_{ij} \geq 0$

Nilai s_{ij} untuk $i = 1,2,3,4$ $j = 1,2,3,4$ berturut-turut dan $n = 4$ diperoleh sebagai berikut:

$a_{11} = 10, s_{11} = 10, s_{55} = 10$

$a_{13} = 7.5, s_{13} = 7.5, s_{57} = 7.5$

$a_{22} = 16, s_{22} = 16, s_{66} = 16$

$a_{32} = 5, s_{32} = 5, s_{76} = 5$

$a_{33} = 10, s_{33} = 10, s_{77} = 10$

$a_{41} = 5, s_{41} = 5, s_{85} = 5$

$a_{42} = 3, s_{42} = 3, s_{86} = 3$

$a_{44} = 16, s_{44} = 16, s_{88} = 16$

Untuk $s_{i+n,j} = s_{i,j+n} = -a_{ij}, \quad a_{ij} < 0$

Nilai s_{ij} diperoleh sebagai berikut:

$a_{12} = -6, s_{52} = -6, s_{16} = -6$

$a_{14} = -5, s_{54} = -5, s_{18} = -5$

$a_{21} = -6, s_{61} = -6, s_{25} = -6$

$a_{23} = -5, s_{63} = -5, s_{27} = -5$

$a_{24} = -3, s_{64} = -3, s_{28} = -3$

$a_{31} = -7.5, s_{71} = -7.5, s_{35} = -7.5$

$a_{34} = -6, s_{74} = -6, s_{38} = -6$

$a_{43} = -6, s_{83} = -6, s_{47} = -6$

Dan $s_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

Sehingga diperoleh matriks S sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 7.5 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & -7.5 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 0 & 16 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & -5 & 10 & 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -7.5 & 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks S, maka langkah selanjutnya menentukan matriks Q dan matriks R. Berikut langkah-langkah menentukan nilai dari matriks Q dan matriks R:

1. Matriks Q

1) Vektor kolom q_1

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor s_1:

$$\begin{aligned} \|s_1\| &= \sqrt{10^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2 + 0^2 + -6^2 + -7.5^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{100 + 0 + 0 + 25 + 0 + 36 + 56.25 + 0} \\ &= \sqrt{217.25} \\ &= 14.73943 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$q_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|} = \begin{bmatrix} 0.6784 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3393 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Vektor kolom q_2

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_2 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_2 = \frac{s_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1}{\| s_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_2 = \begin{matrix} 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor s_2:

$$\| s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1 \| = \begin{matrix} 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} - \begin{matrix} 0.6784 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3393 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix} , \begin{matrix} 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} 0.6784 \\ 0 \\ 0 \\ 0.3393 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= 18.0268$$

Maka diperoleh

$$q_2 = \frac{s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1}{\| s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1 \|}$$

$$= \frac{\begin{matrix} -0.69044907 \\ 16 \\ 5 \\ 2.654775465 \\ -6 \\ 0.414269442 \\ 0.517836803 \\ 0 \end{matrix}}{18.0268}$$

$$q_2 = \begin{matrix} -0.038301255 \\ 0.88756740 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{matrix}$$

3) Vektor kolom q_3

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_3 = \frac{s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2}{\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_3 = \begin{matrix} 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{matrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor $\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \|$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_3 \rangle q_1$:

$$\langle q_1, s_3 \rangle q_1 = \begin{matrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix} , \begin{matrix} 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{matrix} \begin{matrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 4.8331434920 \\ 0 \\ 0 \\ 2.4165717460 \\ 0 \\ -2.899886095 \\ -3.624857619 \\ 0 \end{matrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $\langle q_2, s_3 \rangle q_2$:

$$\langle q_2, s_3 \rangle q_2 = \begin{matrix} -0.038301255 \\ 0.8875674000 \\ 0.2773648120 \\ 0.1472682600 \\ -0.332837775 \\ 0.0229807530 \\ 0.0287259420 \\ 0 \end{matrix} , \begin{matrix} 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{matrix} \begin{matrix} -0.038301255 \\ 0.8875674000 \\ 0.2773648120 \\ 0.1472682600 \\ -0.332837775 \\ 0.0229807530 \\ 0.0287259420 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.090830850 \\ 2.1048527240 \\ 0.6577664760 \\ 0.3492444610 \\ -0.789319771 \\ 0.0544985100 \\ 0.0681231380 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maka nilai norma vektor $\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \|$ adalah:

$$= \begin{pmatrix} 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.8331434920 \\ 0 \\ 0 \\ 2.4165717460 \\ 0 \\ -2.899886095 \\ -3.624857619 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.090830850 \\ 2.1048527240 \\ 0.6577664760 \\ 0.3492444610 \\ -0.789319771 \\ 0.0544985100 \\ 0.0681231380 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.7576873590 \\ -2.104852724 \\ 9.3422335240 \\ -2.765816206 \\ 0.7893197710 \\ -2.154612415 \\ 3.5567344810 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \| = \left\| \begin{pmatrix} 2.7576873590 \\ -2.104852724 \\ 9.3422335240 \\ -2.765816206 \\ 0.7893197710 \\ -2.154612415 \\ 3.5567344810 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\begin{array}{l} 2.7576873590^2 + -2.104852724^2 + 9.3422335240^2 \\ + -2.765816206^2 + 0.7893197710^2 + -2.154612415^2 \\ + 3.5567344810^2 + -6^2 \end{array}}$$

$$= 12.6838$$

Maka diperoleh vektor kolom q_3

$$q_3 = \frac{s_3 - \langle q_1, s_3\rangle q_1 - \langle q_2, s_3\rangle q_2}{\| s_3 - \langle q_1, s_3\rangle q_1 - \langle q_2, s_3\rangle q_2 \|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2.7576873590 \\ -2.104852724 \\ 9.3422335240 \\ -2.765816206 \\ 0.7893197710 \\ -2.154612415 \\ 3.5567344810 \\ -6 \end{pmatrix}}{12.6838}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{pmatrix}$$

4) Vektor kolom q_4

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_4 = \frac{s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3}{\| s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor

$$\| s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3 \|$$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_4 q_1 \rangle$:

$$\langle q_1, s_4 q_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6.5822811360 \\ 0 \\ 0 \\ 3.2911405680 \\ 0 \\ -3.949368682 \\ -4.936710852 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $\langle q_2, s_4 q_2 \rangle$:

$$\langle q_2, s_4 q_2 \rangle = \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.144747458 \\ 3.3542797360 \\ 1.0482124170 \\ 0.5565537220 \\ -1.257854901 \\ 0.0868484750 \\ 0.1085605930 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_3, s_4 q_3 \rangle$:

$$\langle q_3, s_4 q_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.081214772 \\ 0.8252559340 \\ -3.662837579 \\ 1.0844018740 \\ -0.309470975 \\ 0.8447653660 \\ -1.394499579 \\ 2.3524380350 \end{bmatrix}$$

Maka nilai norma vektor $\| s_4 - \langle q_1, s_4 \rangle q_1 - \langle q_2, s_4 \rangle q_2 - \langle q_3, s_4 \rangle q_3 \|$ adalah:

$$= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6.5822811360 \\ 0 \\ 0 \\ 3.2911405680 \\ 0 \\ -3.949368682 \\ -4.936710852 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.144747458 \\ 3.3542797360 \\ 1.0482124170 \\ 0.5565537220 \\ -1.257854901 \\ 0.0868484750 \\ 0.1085605930 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.081214772 \\ 0.8252559340 \\ -3.662837579 \\ 1.0844018740 \\ -0.309470975 \\ 0.8447653660 \\ -1.394499579 \\ 2.3524380350 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} -5.356318907 \\ -4.179535670 \\ 2.6146251610 \\ 11.067903840 \\ -3.432674124 \\ 0.0177548410 \\ 0.2226498380 \\ -2.352438035 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\begin{gathered} -5.356318907^2 + -4.179535670^2 + 2.6146251610^2 \\ + 11.067903840^2 + -3.432674124^2 + -0.0177548410^2 \\ + 0.2226498380^2 + -2.352438035^2 \end{gathered}}$$

$$= 13.8874$$

Maka diperoleh vektor kolom q_4

$$q_4 = \frac{a_4 - \langle q_1, a_4 \rangle q_1 - \langle q_2, a_4 \rangle q_2 - \langle q_3, a_4 \rangle q_3}{\| a_4 - \langle q_1, a_4 \rangle q_1 - \langle q_2, a_4 \rangle q_2 - \langle q_3, a_4 \rangle q_3 \|}$$

$$q_4 = \begin{bmatrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{bmatrix}$$

5) Vektor kolom q_5

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_5 = \frac{s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4}{\| s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor

$$\| s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4 \|$$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_5\rangle q_1$:

$$\langle q_1, s_5\rangle q_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_2, s_5\rangle q_2$:

$$\langle q_2, s_5\rangle q_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.4111263740 \\ -9.527164657 \\ -2.977238955 \\ -1.580780186 \\ 3.5726867460 \\ -0.246675824 \\ -0.308344780 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_3, s_5 \rangle q_3$:

$$\langle q_3, s_5 \rangle q_3 = \begin{bmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.363502919 \\ 1.04071726 \\ -4.619146777 \\ 1.367522122 \\ -0.390268973 \\ 1.065320297 \\ -1.758581454 \\ 2.966622553 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_4, s_5 \rangle q_4$:

$$\langle q_4, s_5 \rangle q_4 = \begin{bmatrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.128182839 \\ 0.880321075 \\ -0.550709412 \\ -2.331194125 \\ 0.723012223 \\ -0.003739641 \\ -0.046895962 \\ 0.495485849 \end{bmatrix}$$

Maka nilai norma vektor $\| s_5 - \langle q_1, s_5 \rangle q_1 - \langle q_2, s_5 \rangle q_2 - \langle q_3, s_5 \rangle q_3 - \langle q_4, s_5 \rangle q_4 \|$ adalah:

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4111263740 \\ -9.527164657 \\ -2.977238955 \\ -1.580780186 \\ 3.5726867460 \\ -0.246675824 \\ -0.308344780 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.363502919 \\ 1.04071726 \\ -4.619146777 \\ 1.367522122 \\ -0.390268973 \\ 1.065320297 \\ -1.758581454 \\ 2.966622553 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 1.128182839 \\ 0.880321075 \\ -0.550709412 \\ -2.331194125 \\ 0.723012223 \\ -0.003739641 \\ -0.046895962 \\ 0.495485849 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.175806294 \\ 1.606126322 \\ 0.647095145 \\ 2.544452189 \\ 6.094570004 \\ -0.814904832 \\ 2.113822196 \\ 1.537891599 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix} -0.175806294^2 + 1.606126322^2 + 0.647095145^2 + 2.544452189^2 \\ + 6.094570004^2 + -0.814904832^2 + 2.113822196^2 + 1.537891599^2 \end{matrix}}$$

$$= 7.3583$$

Maka diperoleh vektor kolom q_5

$$q_5 = \frac{s_5 - \langle q_1, s_5 \rangle q_1 - \langle q_2, s_5 \rangle q_2 - \langle q_3, s_5 \rangle q_3 - \langle q_4, s_5 \rangle q_4}{\| s_5 - \langle q_1, s_5 \rangle q_1 - \langle q_2, s_5 \rangle q_2 - \langle q_3, s_5 \rangle q_3 - \langle q_4, s_5 \rangle q_4 \|}$$

$$q_5 = \begin{pmatrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{pmatrix}$$

6) Vektor kolom q_6

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_6 = \frac{s_6 - \langle q_1, s_6\rangle q_1 - \langle q_2, s_6\rangle q_2 - \langle q_3, s_6\rangle q_3 - \langle q_4, s_6\rangle q_4 - \langle q_5, s_6\rangle q_5}{\| s_6 - \langle q_1, s_6\rangle q_1 - \langle q_2, s_6\rangle q_2 - \langle q_3, s_6\rangle q_3 - \langle q_4, s_6\rangle q_4 - \langle q_5, s_6\rangle q_5 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_6 = \begin{matrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{matrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor

$$\| s_6 - \langle q_1, s_6\rangle q_1 - \langle q_2, s_6\rangle q_2 - \langle q_3, s_6\rangle q_3 - \langle q_4, s_6\rangle q_4 - \langle q_5, s_6\rangle q_5 \|$$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_6\rangle q_1$:

$$\langle q_1, s_6\rangle q_1 = \begin{matrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix} , \begin{matrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -8.906793006 \\ 0 \\ 0 \\ -4.453396503 \\ 0 \\ 5.344075804 \\ 6.680094755 \\ 0 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_2, s_6 \rangle q_2$:

$$\langle q_2, s_6 \rangle q_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.028386182 \\ 0.657802198 \\ 0.205563187 \\ 0.109144821 \\ -0.246675824 \\ 0.017031709 \\ 0.021289637 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_3, s_6 \rangle q_3$:

$$\langle q_3, s_6 \rangle q_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.878260998 \\ 0.670347945 \\ -2.9752898977 \\ 0.880849852 \\ -0.251380479 \\ 0.68619528 \\ -1.132739418 \\ 1.910864178 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_4, s_6 \rangle q_4$:

$$\langle q_4, s_6 \rangle q_4 = \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix} , \begin{matrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0.735374389 \\ -0.57381264 \\ 0.358964508 \\ 1.519523607 \\ -0.47127527 \\ 0.00243758 \\ 0.030567819 \\ -0.322968575 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_5, s_6 \rangle q_5$:

$$\langle q_5, s_6 \rangle q_5 = \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix} , \begin{matrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0.01038756 \\ 0.094898382 \\ 0.038233781 \\ 0.150339605 \\ 0.360099219 \\ -0.048148859 \\ 0.124895722 \\ 0.090866716 \end{matrix}$$

Maka nilai norma vektor $\| s_6 - \langle q_1, s_6 \rangle q_1 - \langle q_2, s_6 \rangle q_2 - \langle q_3, s_6 \rangle q_3 - \langle q_4, s_6 \rangle q_4 - \langle q_5, s_6 \rangle q_5 \|$ adalah:

$$= \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8.906793006 \\ 0 \\ 0 \\ -4.453396503 \\ 0 \\ 5.344075804 \\ 6.680094755 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.028386182 \\ 0.657802198 \\ 0.205563187 \\ 0.109144821 \\ -0.246675824 \\ 0.017031709 \\ 0.021289637 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.878260998 \\ 0.670347945 \\ -2.9752898977 \\ 0.880849852 \\ -0.251380479 \\ 0.68619528 \\ -1.132739418 \\ 1.910864178 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -0.735374389 \\ -0.57381264 \\ 0.358964508 \\ 1.519523607 \\ -0.47127527 \\ 0.00243758 \\ 0.030567819 \\ -0.322968575 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.01038756 \\ 0.094898382 \\ 0.038233781 \\ 0.150339605 \\ 0.360099219 \\ -0.048148859 \\ 0.124895722 \\ 0.090866716 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\begin{gathered} 4.559202135^2 + -0.849235886^2 + 2.372528421^2 + 1.793538618^2 \\ + 0.609232354^2 + 9.998408486^2 + -0.724108515^2 + 1.32123768^2 \end{gathered}}$$

$$= 11.5309$$

Maka diperoleh vektor kolom q_6

$$q_6 = \frac{s_6 - \langle q_1, s_6 \rangle q_1 - \langle q_2, s_6 \rangle q_2 - \langle q_3, s_6 \rangle q_3 - \langle q_4, s_6 \rangle q_4 - \langle q_5, s_6 \rangle q_5}{\| s_6 - \langle q_1, s_6 \rangle q_1 - \langle q_2, s_6 \rangle q_2 - \langle q_3, s_6 \rangle q_3 - \langle q_4, s_6 \rangle q_4 - \langle q_5, s_6 \rangle q_5 \|}$$

$$q_6 = \begin{bmatrix} 0.395389964 \\ -0.073648708 \\ 0.205753967 \\ 0.155541945 \\ 0.052834762 \\ 0.867096973 \\ -0.062797224 \\ 0.114582355 \end{bmatrix}$$

7) Vektorkolom q_7

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_7 = \frac{s_7 - \langle q_1, s_7 \rangle q_1 - \langle q_2, s_7 \rangle q_2 - \langle q_3, s_7 \rangle q_3 - \langle q_4, s_7 \rangle q_4 - \langle q_5, s_7 \rangle q_5}{\| s_7 - \langle q_1, s_7 \rangle q_1 - \langle q_2, s_7 \rangle q_2 - \langle q_3, s_7 \rangle q_3 - \langle q_4, s_7 \rangle q_4 - \langle q_5, s_7 \rangle q_5}$$

$$\frac{- \langle q_6, s_7 \rangle q_6}{- \langle q_6, s_7 \rangle q_6 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor

$$\|s_7 - \langle q_1, s_7\rangle q_1 - \langle q_2, s_7\rangle q_2 - \langle q_3, s_7\rangle q_3 - \langle q_4, s_7\rangle q_4 - \langle q_5, s_7\rangle q_5 - \langle q_6, s_7\rangle q_6\|$$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_7\rangle q_1$:

$$\langle q_1, s_7\rangle q_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.833143492 \\ 0 \\ 0 \\ -2.416571746 \\ 0 \\ 2.899886095 \\ 3.624857619 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_2, s_7\rangle q_2$:

$$\langle q_2, s_7\rangle q_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.288426472 \\ -6.683800078 \\ -2.088687524 \\ -1.108999279 \\ 2.506425029 \\ -0.173055883 \\ -0.216319854 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_3, s_7 \rangle q_3$:

$$\langle q_3, s_7 \rangle q_3 = \begin{matrix} 0{,}217418073 \\ -0{,}165948117 \\ 0{,}736548473 \\ -0{,}218058958 \\ 0{,}062230544 \\ -0{,}169871207 \\ 0{,}280415529 \\ -0{,}473044356 \end{matrix} , \begin{matrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0{,}217418073 \\ -0{,}165948117 \\ 0{,}736548473 \\ -0{,}218058958 \\ 0{,}062230544 \\ -0{,}169871207 \\ 0{,}280415529 \\ -0{,}473044356 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1.176009726 \\ -0.897609828 \\ 3.983974998 \\ -1.179476256 \\ 0.336603685 \\ -0.918829739 \\ 1.516761619 \\ -2.558686842 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_4, s_7 \rangle q_4$:

$$\langle q_4, s_7 \rangle q_4 = \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix} , \begin{matrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1.91713073 \\ 1.49593711 \\ -0.9358252 \\ -3.9614180 \\ 1.22862084 \\ -0.0063548 \\ -0.0796907 \\ 0.84198333 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\square q_5, s_7 \square q_5$:

$$\square q_5, s_7 \square q_5 = \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix} , \begin{matrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0,141406416 \\ 1,291856863 \\ 0,520478553 \\ 2,046581255 \\ 4,902050343 \\ -0,655453053 \\ 1,70021229 \\ 1,236973574 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\square q_6, s_7 \square q_6$:

$$\square q_6, s_7 \square q_6 = \begin{matrix} 0.395389964 \\ -0.073648708 \\ 0.205753967 \\ 0.155541945 \\ 0.052834762 \\ 0.867096973 \\ -0.062797224 \\ 0.114582355 \end{matrix} , \begin{matrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0.395389964 \\ -0.073648708 \\ 0.205753967 \\ 0.155541945 \\ 0.052834762 \\ 0.867096973 \\ -0.062797224 \\ 0.114582355 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0.315014959 \\ 0.058677374 \\ -0.163928232 \\ -0.123923326 \\ -0.042094494 \\ -0.690833209 \\ 0.050031784 \\ -0.091290016 \end{matrix}$$

Maka nilai norma vektor:

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 7.5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4.833143492 \\ 0 \\ 0 \\ -2.416571746 \\ 0 \\ 2.899886095 \\ 3.624857619 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.288426472 \\ -6.683800078 \\ -2.088687524 \\ -1.108999279 \\ 2.506425029 \\ -0.173055883 \\ -0.216319854 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.176009726 \\ -0.897609828 \\ 3.983974998 \\ -1.179476256 \\ 0.336603685 \\ -0.918829739 \\ 1.516761619 \\ -2.558686842 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1.917130731 \\ 1.495937119 \\ -0.935825206 \\ -3.961418082 \\ 1.228620843 \\ -0.006354803 \\ -0.079690708 \\ 0.841983334 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.141406416 \\ 1.291856863 \\ 0.520478553 \\ 2.046581255 \\ 4.902050343 \\ -0.655453053 \\ 1.70021229 \\ 1.236973574 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.315014959 \\ 0.058677374 \\ -0.163928232 \\ -0.123923326 \\ -0.042094494 \\ -0.690833209 \\ 0.050031784 \\ -0.091290016 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.907997938 \\ -0.265061456 \\ -1.3160125891 \\ 0.743807433 \\ -1.431605407 \\ -0.455359408 \\ 3.40414725 \\ 0.57101995 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{1.907997938^2 + -0.26506145^2 + -1.3160125891^2 + 0.743807433^2 + -1.431605407^2 + -0.455359408^2 + 3.40414725^2 + 0.57101995^2}$$

$$= 4{,}4908$$

Maka diperoleh vektor kolom q_6

$$q_7 = \frac{s_7 - \langle q_1, s_7 \rangle q_1 - \langle q_2, s_7 \rangle q_2 - \langle q_3, s_7 \rangle q_3 - \langle q_4, s_7 \rangle q_4 - \langle q_5, s_7 \rangle q_5 - \langle q_6, s_7 \rangle q_6}{\| s_7 - \langle q_1, s_7 \rangle q_1 - \langle q_2, s_7 \rangle q_2 - \langle q_3, s_7 \rangle q_3 - \langle q_4, s_7 \rangle q_4 - \langle q_5, s_7 \rangle q_5 - \langle q_6, s_7 \rangle q_6 \|}$$

$$q_7 = \begin{bmatrix} 0.424868161 \\ -0.059023214 \\ -0.293046359 \\ 0.16562916 \\ -0.318786276 \\ -0.101398283 \\ 0.758026911 \\ 0.12715328 \end{bmatrix}$$

8) Vektor kolom q_8

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_8 = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 \|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_8 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor

$$\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 \|$$

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $\langle q_1, s_8\rangle q_1$:

$$\langle q_1, s_8\rangle q_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0.67840 \\ 0 \\ 0 \\ 0.33930 \\ 0 \\ -0.4071 \\ -0.5088 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.3015 \\ 0 \\ 0 \\ -1.15075 \\ 0 \\ 1.380898 \\ 1.726123 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_2, s_8\rangle q_2$:

$$\langle q_2, s_8\rangle q_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -0.038301255 \\ 0.8875674 \\ 0.277364812 \\ 0.14726826 \\ -0.332837775 \\ 0.022980753 \\ 0.028725942 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.158390429 \\ -3.67043273 \\ -1.147010228 \\ -0.609010922 \\ 1.376412274 \\ -0.095034257 \\ -0.118792822 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_3, s_8 \rangle q_3$:

$$\langle q_3, s_8 \rangle q_3 = \left\langle \begin{matrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{matrix}, \begin{matrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{matrix} \right\rangle \begin{matrix} 0.217418073 \\ -0.165948117 \\ 0.736548473 \\ -0.218058958 \\ 0.062230544 \\ -0.169871207 \\ 0.280415529 \\ -0.473044356 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -2.734520712 \\ 2.087170379 \\ -9.263751741 \\ 2.742581272 \\ -0.782688892 \\ 2.136512052 \\ -3.526855238 \\ 5.949595491 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_4, s_8 \rangle q_4$:

$$\langle q_4, s_8 \rangle q_4 = \left\langle \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix}, \begin{matrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{matrix} \right\rangle \begin{matrix} -0.385696308 \\ -0.300958831 \\ 0.1882731940 \\ 0.7969745120 \\ -0.247179034 \\ 0.0012784860 \\ 0.0160325070 \\ -0.169393698 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 0.389005696 \\ 0.303541146 \\ -0.189888634 \\ -0.803812788 \\ 0.249299903 \\ -0.001289455 \\ -0.016170071 \\ 0.170847145 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_5, s_8\rangle q_5$:

$$\langle q_5, s_8\rangle q_5 = \left\langle \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix}, \begin{matrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{matrix} \right\rangle \begin{matrix} -0.023892243 \\ 0.218274102 \\ 0.087940848 \\ 0.345793483 \\ 0.828257886 \\ -0.110746345 \\ 0.287270456 \\ 0.209000938 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0.054498418 \\ 0.497885151 \\ 0.200593851 \\ 0.788757986 \\ 1.889263545 \\ -0.252613391 \\ 0.655266444 \\ 0.476732982 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_6, s_8\rangle q_6$:

$$\langle q_6, s_8\rangle q_6 = \left\langle \begin{matrix} 0.395389964 \\ -0.073648708 \\ 0.205753967 \\ 0.155541945 \\ 0.052834762 \\ 0.867096973 \\ -0.062797224 \\ 0.114582355 \end{matrix}, \begin{matrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{matrix} \right\rangle \begin{matrix} 0.395389964 \\ -0.073648708 \\ 0.205753967 \\ 0.155541945 \\ 0.052834762 \\ 0.867096973 \\ -0.062797224 \\ 0.114582355 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -0.457549147 \\ 0.085227008 \\ -0.23810051 \\ -0.179994666 \\ -0.061140905 \\ -1.003413128 \\ 0.072669564 \\ -0.132595826 \end{matrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai $\langle q_7, s_8\rangle q_7$:

$$\langle q_7, s_8\rangle q_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 0.424868161 \\ -0.059023214 \\ -0.293046359 \\ 0.16562916 \\ -0.318786276 \\ -0.101398283 \\ 0.758026911 \\ 0.12715328 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0.424868161 \\ -0.059023214 \\ -0.293046359 \\ 0.16562916 \\ -0.318786276 \\ -0.101398283 \\ 0.758026911 \\ 0.12715328 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.784076972 \\ -0.108924949 \\ -0.540805178 \\ 0.305661902 \\ -0.588307152 \\ -0.187126421 \\ 1.398907941 \\ 0.234656225 \end{pmatrix}$$

Maka nilai norma vektor:

$$\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 \|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.3015 \\ 0 \\ 0 \\ -1.15075 \\ 0 \\ 1.380898 \\ 1.726123 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.158390429 \\ -3.67043273 \\ -1.147010228 \\ -0.609010922 \\ 1.376412274 \\ -0.095034257 \\ -0.118792822 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.734520712 \\ 2.087170379 \\ -9.263751741 \\ 2.742581272 \\ -0.782688892 \\ 2.136512052 \\ -3.526855238 \\ 5.949595491 \end{pmatrix} \right.$$

$$- \begin{pmatrix} 0.389005696 \\ 0.303541146 \\ -0.189888634 \\ -0.803812788 \\ 0.249299903 \\ -0.001289455 \\ -0.016170071 \\ 0.170847145 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.054498418 \\ 0.497885151 \\ 0.200593851 \\ 0.788757986 \\ 1.889263545 \\ -0.252613391 \\ 0.655266444 \\ 0.476732982 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.457549147 \\ 0.085227008 \\ -0.23810051 \\ -0.179994666 \\ -0.061140905 \\ -1.003413128 \\ 0.072669564 \\ -0.132595826 \end{pmatrix}$$

$$\left. - \begin{pmatrix} 0.784076972 \\ -0.108924949 \\ -0.540805178 \\ 0.305661902 \\ -0.588307152 \\ -0.187126421 \\ 1.398907941 \\ 0.234656225 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \begin{matrix} -0.783407918 \\ -2.194466005 \\ 5.178962441 \\ -1.093434334 \\ -2.082838774 \\ -1.97793354 \\ -0.191148494 \\ 9.300763983 \end{matrix}$$

$$= \sqrt{-0.783407918^2 + -2.194466005^2 + 5.178962441^2 + -1.093434334^2 + -2.082838774^2 + -1.9779335^2 + -0.191148494^2 + 9.300763983^2}$$

$$= 11.3242$$

Maka diperoleh vektor kolom q_6

$$q_8 = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5}$$
$$\frac{- \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7}{- \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 \|}$$

$$q_8 = \begin{matrix} 0.613727967 \\ 4.815681046 \\ 26.82165197 \\ 1.195598643 \\ 4.338217357 \\ 3.912221088 \\ 0.036537747 \\ 86.50421067 \end{matrix}$$

Dari langkah-langkah yang telah dilakukan untuk memperoleh vektor kolom $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7$ dan q_8 maka dapat dibentuk matriks Q, yaitu:

$$Q = \begin{matrix} 0.6784000 & -0.038301255 & 0.2174180730 & -0.385696308 \\ 0 & 0.8875674000 & -0.165948117 & -0.300958831 \\ 0 & 0.2773648120 & 0.7365484730 & 0.1882731940 \\ 0.3393000 & 0.1472682600 & -0.218058958 & 0.7969745120 \\ 0 & -0.332837770 & 0.0622305440 & -0.247179034 \\ -0.407100 & 0.0229807530 & -0.169871207 & 0.0012784860 \\ -0.5088 & 0.0287259420 & 0.2804155290 & 0.0160325070 \\ 0 & 0 & -0.473044356 & -0.169393698 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -0.0238922 & 0.3953899640 & 0.4248681610 & 0.6137279670 \\ 0.21827410 & -0.073648708 & -0.059023214 & 4.8156810460 \\ 0.08794084 & 0.2057539670 & -0.293046359 & 26.821651970 \\ 0.34579348 & 0.1555419450 & 0.1656291600 & 1.1955986430 \\ 0.82825788 & 0.0528347620 & -0.318786276 & 4.3382173570 \\ -0.1107463 & 0.8670969730 & -0.101398283 & 3.9122210880 \\ 0.28727045 & -0.062797224 & 0.7580269110 & 0.0365377470 \\ 0.20900093 & 0.1145823550 & 0.1271532800 & 86.504210670 \end{matrix}$$

2. Matriks *R*

Berdasarkan persamaan (2.18) maka dapat dibentuk matriks *R* sebagai berikut:

$$R = \begin{array}{cccc} 14.7394300000 & 1.017680550 & 7.12376351800 & 9.7018874580 \\ 0 & 18.02680000 & 2.37148494300 & 3.7791831200 \\ 0 & 0 & 12.6838000000 & -4.972975591 \\ 0 & 0 & 0 & 13.887400000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -13.12807848 & -7.123763518 & -3,392268342 \\ -10.7340182 & 0.7411292910 & -7.530470453 & -4.135384796 \\ -6.271341189 & -4.039503176 & 5.4089786940 & -12.57724655 \\ -2.925054805 & 1.9066150600 & -4.970570605 & -1,008580294 \\ 7.3583000000 & 0.4347670280 & 5,9185072970 & 2.281008822 \\ 0 & 11.530900000 & -0.796719664 & -1.157209815 \\ 0 & 0 & 4.4908000000 & 1.8454594700 \\ 0 & 0 & 0 & 11.324200000 \end{array}$$

Selanjutnya akan dicari R^{-1} dan Q^T:

$$R^{-1} = \begin{array}{cccc} -0.0678 & 0.0038 & 0.0374 & 0.0597 \\ 0 & -0.0555 & 0.0104 & 0.0188 \\ 0 & 0 & -0.0788 & -0.0282 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0.0612 & -0.0766 & -0.1744 & -0.0362 \\ -0.0646 & 0.0065 & 0.0016 & -0.0064 \\ -0.0784 & -0.0199 & 0.1635 & 0.1029 \\ -0.0286 & 0.0129 & -0.0397 & -0.0071 \\ -0.1359 & 0.0051 & 0.1800 & 0.0014 \\ 0 & -0.0867 & -0.0154 & 0.0064 \\ 0 & 0 & -0.2227 & -0.0363 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0883 \end{array}$$

Berdasarkan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks yang diberikan diperoleh:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 4 + r \\ -2 + r \\ -1 + r \\ -3 + r \\ 6 - r \\ -r \\ 1 - r \\ -1 - r \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.19) diperoleh solusi nilai $\hat{x}$ sebagai berikut:

$$\tilde{x} = R^{-1}Q^{T}\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.316355 + 0.03782r \\ 0.034669 + 0.03073r \\ 0.070777 + 0.03782r \\ -0.23795 + 0.03073r \\ 0.392005 - 0.03782r \\ 0.096135 - 0.03073r \\ 0.146428 - 0.03782r \\ -0.17648 - 0.03073r \end{bmatrix}$$

Dengan

$$\underline{x_1} = 0.316355 + 0.03782r, i\,(0.070777 + 0.03782r)$$

$$\overline{x_1} = 0.392005 - 0.03782r, i(0.146428 - 0.03782r)$$

$$\underline{x_2} = 0.034669 + 0.03073r, i(-0.23795 + 0.03073r)$$

$$\overline{x_2} = 0.096135 - 0.03073r, i(-0.17648 - 0.03073r)$$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 = (0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r) + i(0.070777 + 0.03782r, 0.146428 - 0.03782r)$$

$$\tilde{x}_2 = (0.034669 + 0.03073r, 0.096135 - 0.03073r) + i(-0.23795 + 0.03073r, -0.17648 - 0.03073r)$$

Berdasarkan landasan teori pada bab II untuk mencari apakah solusi nilai $\tilde{x}$ yang diperoleh adalah solusi *fuzzy* kuat atau solusi *fuzzy* lemah, maka diperoleh:

$$\underline{u}_1\ r\ = \min\ \underline{x}_1\ r\ , \overline{x}_1\ r\ , \underline{x}_1\ 1\ , \overline{x}_1\ 1$$

$$= \min \begin{matrix} 0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r, \\ i(0.070777 + 0.03782r, 0.146428 - 0.03782r, \\ 0{,}3542{,}0{,}3542\ \ , i(0{,}108597{,}0{,}108597 \end{matrix}$$

$$= 0.316355 + 0.03782r, i(0.070777 + 0.03782r)$$

$$\underline{u}_1\ r\ = \underline{x}_1\ r$$

$$\overline{u}_1\ r\ = \text{maks}\ \underline{x}_1\ r\ , \overline{x}_1\ r\ , \underline{x}_1\ 1\ , \overline{x}_1\ 1$$

$$= \text{maks} \begin{matrix} 0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r, \\ i(0.070777 + 0.03782r, 0.146428 - 0.03782r, \\ 0.3542, 0.3542\ \ , i(0.108597, 0.108597) \end{matrix}$$

$$\overline{u}_1\ r\ = 0.392005 - 0.03782r, i(0.146428 - 0.03782r)$$

$$\overline{u}_1\ r\ = \overline{x}_1\ r$$

$$\underline{u}_2\ r\ = \min\ \underline{x}_2\ r\ , \overline{x}_2\ r\ , \underline{x}_2\ 1\ , \overline{x}_2\ 1$$

$$= \min \begin{matrix} 0.034669 + 0.03073r, i\ \ -0.23795 + 0.03073r\ \ , \\ 0.096135 - 0.03073r, i\ \ -0.17648 - 0.03073r\ \ , \\ 0.065399, 0.065399, \quad i(-0.20722, -0.20722) \end{matrix}$$

$$= 0.034669 + 0.03073r, i(-0.23795 + 0.03073r)$$

$$\underline{u}_2\ r\ = \underline{x}_2\ r$$

$$\overline{u}_2\ r\ = \text{maks}\ \underline{x}_2\ r\ , \overline{x}_2\ r\ , \underline{x}_2\ 1\ , \overline{x}_2\ 1$$

$$= \min \begin{matrix} 0.034669 + 0.03073r, i\ \ -0.23795 + 0.03073r\ \ , \\ 0.096135 - 0.03073r, i\ \ -0.17648 - 0.03073r\ \ , \\ 0.065399, 0.065399, \quad i(-0.20722, -0.20722) \end{matrix}$$

$$= 0.096135 - 0.03073r, i\ \ -0.17648 - 0.03073r$$

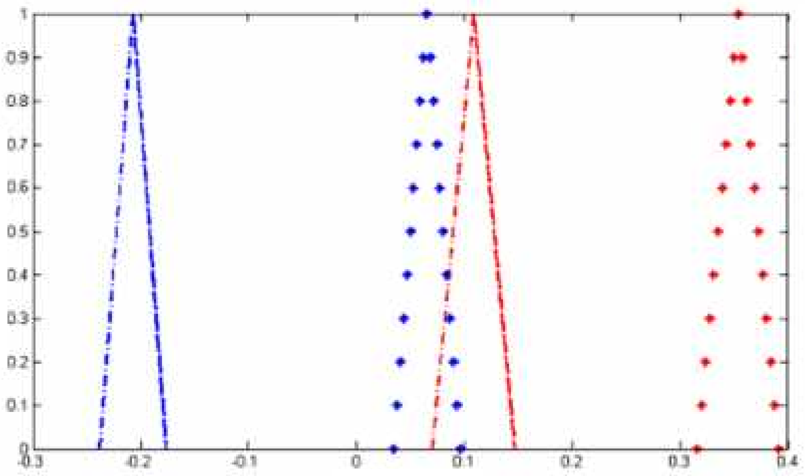
$$\overline{u}_2\ r\ = \overline{x}_2\ r$$

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks maka diperoleh:

$$\tilde{u}_1 = (0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r) + i(0.070777$$
$$+0.03782r, 0.146428 - 0.03782r)$$
$$\tilde{u}_2 = (0.034669 + 0.03073r, 0.096135 - 0.03073r) + i(-0.23795$$
$$+0.03073r, -0.17648 - 0.03073r)$$

dengan $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$, sehingga solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks ini adalah solusi kuat. Berdasarkan persamaan (2.3) solusi sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks ini dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$$x_1 = 0.3542 + 0.1086i$$
$$x_2 = 0.0654 - 0.2072i$$



Keterangan:

Real x
Im x

Gambar 4.1 Solusi untuk sistem persamaan dari contoh 4.1

Contoh 4.2: (Untuk kasus $m = n = 3$) :

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks berikut:

$$(2+3i)X_1 + (5+2i)X_2 + (3-2i)X_3 = (1+5r, 3+6r) + i(1+8r, 6+5r)$$

$$(7-4i)X_1 + (8+2i)X_2 + (1-4i)X_3 = (2+3r, 4+3r) + i(-2+4r, 8+2r)$$

$$(5-5i)X_1 + (6-2i)X_2 - (3-5i)X_3 = (2+4r, 2+7r) + i(3-5r, -4+3r)$$

Selesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks di atas dengan menggunakan metode dekomposisi *QR*.

Penyelesaian:

Berdasarkan soal diatas maka sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks tersebut dibentuk kedalam matriks menjadi:

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 5+2i & 3-2i \\ 7-4i & 8+2i & 1-4i \\ 5-5i & 6-2i & -3+5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) + i(1+8r, 6+5r) \\ (2+3r, 4+3r) + i(-2+4r, 8+2r) \\ (2+4r, 2+7r) + i(3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditulis dalam bentuk matriks (2.13), sehingga diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) \\ (2+3r, 4+3r) \\ (2+4r, 2+7r) \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} (1+8r, 6+5r) \\ (-2+4r, 8+2r) \\ (3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mengubah matriks A, B, P, Q, U dan V ke dalam bentuk matriks C pada persamaan (2.14)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -3 & -2 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -3 & 5 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & -4 & 7 & 8 & 1 \\ -5 & -2 & 5 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) \\ (2+3r, 4+3r) \\ (2+4r, 2+7r) \\ (1+8r, 6+5r) \\ (-2+4r, 8+2r) \\ (3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

Menentukan matriks S dari matriks C berdasarkan ketentuan (2.9)

Sehingga diperoleh matriks S sebagai berikut:

$$S = \begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 8 & 1 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 6 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 8 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -5 & 5 & 6 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ -5 & -2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 5 & 5 & 6 & 0 \end{matrix}$$

Setelah memperoleh matriks S, maka langkah selanjutnya menentukan matriks *Q* dan matriks *R*. Berdasarkan landasan teori pada persamaan 2.15 − 2.18 sebagai berikut:

1. Matriks *Q*

1) Vektor kolom q_1

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_1 = \begin{matrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \end{matrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor s_1:

$$\|s_1\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 5^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + -4^2 + -5^2}$$

$$= 11.313708$$

Maka diperoleh:

$$q_1 = \frac{s_1}{\|s_1\|} = \begin{matrix} 0.176776703 \\ 0.618718461 \\ 0.441941758 \\ 0.265165055 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.353553406 \\ -0.441941758 \end{matrix}$$

2) Vektor kolom q_2

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_2 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_2 = \frac{s_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1}{\|s_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1\|}$$

Dari matriks S diperoleh vektor kolom $s_2 = \begin{matrix} 5 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{matrix}$

Selanjutnya menentukan nilai norma vektor s_2:

$\|s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1\| =$ 13.99999938

Maka diperoleh:

$$q_2 = \frac{s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1}{\| s_2 - \langle q_1, s_2 \rangle q_1 \|}$$

$$q_2 = \begin{matrix} 0.520416483 \\ 0.300240207 \\ 0.260208192 \\ -0.100080135 \\ 0.320256313 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.560448597 \\ 0.380304433 \end{matrix}$$

3) Vektor kolom q_3

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_3 = \frac{s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2}{\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \|}$$

Terlebih dahulu menentukan nilai norma vektor:

$$\| s_3 - \langle q_1, s_3 \rangle q_1 - \langle q_2, s_3 \rangle q_2 \| = \begin{matrix} 2.74479181 \\ -0.471754869 \\ -1.033854194 \\ -0.717748509 \\ 0.12179499 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \\ -2.880608668 \\ 1.277444175 \end{matrix}$$

$$= 7.5686891$$

Maka diperoleh vektor kolom q_3

$$q_3 = \frac{s_3 - \langle q_1, s_3\rangle q_1 - \langle q_2, s_3\rangle q_2}{\| s_3 - \langle q_1, s_3\rangle q_1 - \langle q_2, s_3\rangle q_2 \|}$$

$$q_3 = \begin{matrix} 0.362650886 \\ -0.062329799 \\ -0.136596203 \\ -0.094831284 \\ 0.016091953 \\ 0.660616381 \\ 0 \\ 0 \\ -0.396369828 \\ -0.264246552 \\ -0.380595455 \\ 0.168780109 \end{matrix}$$

4) Vektor kolom q_4

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_4 = \frac{s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3}{\| s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3 \|}$$

Nilai norma vektor $\| s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3 \|$ adalah:

$$\| s_4 - \langle q_1, s_4\rangle q_1 - \langle q_2, s_4\rangle q_2 - \langle q_3, s_4\rangle q_3 \| = \begin{matrix} -4.118293108 \\ -0.447775134 \\ 1.826340352 \\ 1.289435524 \\ 5.507960859 \\ 3.484702724 \\ -3 \\ 0 \\ 0.909178366 \\ 0.606118911 \\ 0.170271601 \\ 0.189581366 \end{matrix}$$

$$= 8.6544039$$

Maka diperoleh vektor kolom q_4

$$q_4 = \frac{a_4 - \langle q_1, a_4\rangle q_1 - \langle q_2, a_4\rangle q_2 - \langle q_3, a_4\rangle q_3}{\|a_4 - \langle q_1, a_4\rangle q_1 - \langle q_2, a_4\rangle q_2 - \langle q_3, a_4\rangle q_3\|}$$

$$q_4 = \begin{bmatrix} -0.475860978 \\ -0.05173957 \\ 0.211030173 \\ 0.148991836 \\ 0.636434458 \\ 0.402650808 \\ -0.346644325 \\ 0 \\ 0.10505384 \\ 0.070035894 \\ 0.019674561 \\ 0.021905768 \end{bmatrix}$$

5) Vektor kolom q_5

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_5 = \frac{s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4}{\|s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4\|}$$

Nilai norma vektor $\|s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4\|$ adalah:

$$\|s_5 - \langle q_1, s_5\rangle q_1 - \langle q_2, s_5\rangle q_2 - \langle q_3, s_5\rangle q_3 - \langle q_4, s_5\rangle q_4\| = \left\| \begin{matrix} 1.510244585 \\ -1.449249051 \\ -1.168376411 \\ 3.593985563 \\ 1.157328165 \\ 0.018274579 \\ 1.247256125 \\ -2 \\ 0.341779127 \\ 0.227852752 \\ 0.422953694 \\ -0.775198884 \end{matrix} \right\|$$

$$= 5.148489$$

Maka diperoleh vektor kolom q_5

$$q_5 = \frac{s_5 - \langle q_1, s_5 \rangle q_1 - \langle q_2, s_5 \rangle q_2 - \langle q_3, s_5 \rangle q_3 - \langle q_4, s_5 \rangle q_4}{\lVert s_5 - \langle q_1, s_5 \rangle q_1 - \langle q_2, s_5 \rangle q_2 - \langle q_3, s_5 \rangle q_3 - \langle q_4, s_5 \rangle q_4 \rVert}$$

$$q_5 = \begin{matrix} 0.29333744 \\ -0.281490171 \\ -0.226935789 \\ 0.698066086 \\ 0.224789868 \\ 0.003549503 \\ 0.242256733 \\ -0.388463489 \\ 0.066384356 \\ 0.044256237 \\ 0.082151034 \\ -0.150568232 \end{matrix}$$

6) Vektor kolom q_6

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_6 = \frac{s_6 - \langle q_1, s_6 \rangle q_1 - \langle q_2, s_6 \rangle q_2 - \langle q_3, s_6 \rangle q_3 - \langle q_4, s_6 \rangle q_4 - \langle q_5, s_6 \rangle q_5}{\lVert s_6 - \langle q_1, s_6 \rangle q_1 - \langle q_2, s_6 \rangle q_2 - \langle q_3, s_6 \rangle q_3 - \langle q_4, s_6 \rangle q_4 - \langle q_5, s_6 \rangle q_5 \rVert}$$

$$q_6 = \begin{matrix} -0.168385694 \\ 0.215375855 \\ -0.299577168 \\ 0.130821938 \\ 0.109106525 \\ -0.151850966 \\ -0.123416041 \\ 0.131766809 \\ -0.783760264 \\ 0.072742116 \\ 0.289190132 \\ -0.21826411 \end{matrix}$$

7) Vektorkolom q_7

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_7 = \frac{s_7 - \langle q_1, s_7\rangle q_1 - \langle q_2, s_7\rangle q_2 - \langle q_3, s_7\rangle q_3 - \langle q_4, s_7\rangle q_4 - \langle q_5, s_7\rangle q_5 - \langle q_6, s_7\rangle q_6}{\lVert s_7 - \langle q_1, s_7\rangle q_1 - \langle q_2, s_7\rangle q_2 - \langle q_3, s_7\rangle q_3 - \langle q_4, s_7\rangle q_4 - \langle q_5, s_7\rangle q_5 - \langle q_6, s_7\rangle q_6 \rVert}$$

$$q_7 = \begin{matrix} 0.147069517 \\ -0.055436307 \\ -0.132591596 \\ 0.299027848 \\ 0.038565250 \\ 0.064877565 \\ 0.102565643 \\ 0.861306156 \\ 0.150160420 \\ 0.274100895 \\ -0.072130755 \\ 0.085746805 \end{matrix}$$

8) Vektor kolom q_8

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_8 = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7}{\lVert s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 \rVert}$$

$$q_8 = \begin{matrix} -0.195499882 \\ 0.111773999 \\ -0.088537783 \\ -0.253873889 \\ 0.241501451 \\ 0.203452519 \\ 0.734810688 \\ 0.118330029 \\ 0.098979028 \\ -0.269852675 \\ 0.196326308 \\ -0.319639709 \end{matrix}$$

9) Vektor kolom q_9

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_9 = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 \|}$$

$$q_9 = \begin{matrix} -0.361659960 \\ 0.469673625 \\ -0.156764806 \\ 0.275164214 \\ -0.190167699 \\ 0.117348623 \\ 0.300255983 \\ -0.177735061 \\ 0.004592022 \\ 0.148915226 \\ -0.085042400 \\ 0.589246459 \end{matrix}$$

10) Vektor kolom q_{10}

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_{10} = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9 \|}$$

$$q_{10} = \begin{matrix} -0.070975563 \\ 0.063015013 \\ 0.008775771 \\ 0.234862096 \\ -0.535876388 \\ 0.456436425 \\ -0.234429447 \\ 0.056164164 \\ 0.175803328 \\ -0.221543398 \\ 0.511986786 \\ -0.200065933 \end{matrix}$$

11) Vektor kolom q_{11}

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_{11} = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9 - \langle q_{10}, s_{11}\rangle q_{10}}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9 - \langle q_{10}, s_{11}\rangle q_{10} \|}$$

$$q_{11} = \begin{matrix} 0.012326834 \\ -0.203396544 \\ 0.329606626 \\ -0.149565855 \\ -0.182772792 \\ 0.293921185 \\ 0.241837136 \\ -0.135472952 \\ -0.208307602 \\ 0.748229749 \\ 0.107913282 \\ -0.126288274 \end{matrix}$$

12) Vektor kolom q_{12}

Berikut akan ditentukan vektor kolom q_1 dengan mengoperasikan bentuk

$$q_{12} = \frac{s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9 - \langle q_{10}, s_{11}\rangle q_{10} - \langle q_{11}, s_{12}\rangle q_{11}}{\| s_8 - \langle q_1, s_8\rangle q_1 - \langle q_2, s_8\rangle q_2 - \langle q_3, s_8\rangle q_3 - \langle q_4, s_8\rangle q_4 - \langle q_5, s_8\rangle q_5 - \langle q_6, s_8\rangle q_6 - \langle q_7, s_8\rangle q_7 - \langle q_8, s_9\rangle q_8 - \langle q_9, s_{10}\rangle q_9 - \langle q_{10}, s_{11}\rangle q_{10} - \langle q_{11}, s_{12}\rangle q_{11} \|}$$

$$q_{12} = \begin{matrix} 0.172393841 \\ 0.336685172 \\ -0.611414967 \\ -0.277405960 \\ 0.114674261 \\ 0.155854544 \\ -0.227717578 \\ -0.150951681 \\ 0.326347650 \\ 0.372776230 \\ -0.022864027 \\ -0.219251030 \end{matrix}$$

Dari langkah-langkah yang telah dilakukan untuk memperoleh vektor kolom $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7$ dan q_8 maka dapat dibentuk matriks Q, yaitu:

0.176776703	0.520416483	0.362650886	−0.475860978	0.293337440	−0.168385694	0.147069517	−0.195499882	−0.361659960	−0.070975563	0.012326834	0.172393841
0.618718461	0.300240207	−0.062329799	−0.051739570	−0.281490171	0.215375855	−0.055436307	0.111773999	0.469673625	0.063015013	−0.203396544	0.336685172
0.441941758	0.260208192	−0.136596203	0.211030173	−0.226935789	−0.299577168	−0.132591596	−0.088537783	−0.156764806	0.008775771	0.329606626	−0.611414967
0.265165055	−0.100080135	−0.094831284	0.148991836	0.698066086	0.130821938	0.299027848	−0.253873889	0.275164214	0.234862096	−0.149565855	−0.277405960
0	0.320256313	0.016091953	0.636434458	0.224789868	0.109106525	0.038565250	0.241501451	−0.190167699	−0.535876388	−0.182772792	0.114674261
0	0	0.660616381	0.402650808	0.003549503	−0.151850966	0.064877565	0.203452519	0.117348623	0.456436425	0.293921185	0.155854544
0	0	0	−0.346644325	0.242256733	−0.123416041	0.102565643	0.734810688	0.300255983	−0.234429447	0.241837136	−0.227717578
0	0	0	0	−0.388463489	0.131766809	0.861306156	0.118330029	−0.177735061	0.056164164	−0.135472952	−0.150951681
0	0	−0.396369828	0.105053840	0.066384356	−0.783760264	0.150160420	0.098979028	0.004592022	0.175803328	−0.208307602	0.326347650
0	0	−0.264246552	0.070035894	0.044256237	0.072742116	0.274100895	−0.269852675	0.148915226	−0.221543398	0.748229749	0.372776230
−0.353553406	0.560448597	−0.380595455	0.019674561	0.082151034	0.289190132	−0.072130755	0.196326308	−0.085042400	0.511986786	0.107913282	−0.022864027
−0.441941758	0.380304433	0.168780109	0.021905768	−0.150568232	−0.218264110	0.085746805	−0.319639709	0.589246459	−0.200065933	−0.126288274	−0.219251030

2. Matriks *R*

11.3137080	9.89949537300	2.563262195	5.2149127410
0	6.244997900	−0.380304730	4.5436357070
0	0	7.568689100	2.2937627960
0	0	0	8.6544039000
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

2.209708789	4.949747687	0	−0.707106812
2.582066212	1.120896400	−1.2810252510	1.120897193
3.345085081	1.683089491	−6.1420385150	−4.989135746
9.367688691	−0.666256777	−4.5169036420	−1.728779290
5.148489000	1.899485235	−2.6869474550	−1.252402574
0	5.599897800	−2.7022106680	−3.237940896
0	0	7.3287305000	8.578425130
0	0	0	4.660609800
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

−4.065864171	−5.214912741	−7.071068124	−2.563262195
0.040032608	4.263412891	5.124101991	−0.740592365
1.378983913	−5.418562540	−4.746697573	−2.472203238
−4.407216158	2.340174696	1.904319346	−2.726609697
−2.029018728	−2.191215942	0.084154243	0.269609689
−1.129140336	−1.808082399	−0.293853875	2.741090367
1.243195203	4.226838702	1.424993683	4.868853125
0.531918871	0.791095160	−1.331081349	1.162041131
4.349902200	3.045765698	3.392872403	0.683053162
0	3.457092400	2.155309456	−1.810033777
0	0	3.812249300	−0.235411691
0	0	0	2.625735100

Berdasarkan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks yang diberikan diperoleh:

$$\tilde{y} = \begin{array}{ccc} -114 & + & 48r \\ 4 & + & 77r \\ 132 & + & 71r \\ -9 & + & 46r \\ 16 & + & 68r \\ -52 & + & 67r \\ -18 & + & -48r \\ 158 & + & -77r \\ 274 & + & -71r \\ 83 & + & -46r \\ 152 & + & -68r \\ 82 & + & -67r \end{array}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.19) diperoleh nilai $\hat{x}$ sebagai berikut:

$$\tilde{x} = R^{-1}Q^{T}\tilde{y} = \begin{array}{ccc} 6 & + & 3r \\ -3 & + & 4r \\ -10 & + & 2r \\ 13 & + & 2r \\ -4 & + & 3r \\ -13 & + & 2r \\ 12 & - & 3r \\ 5 & - & 4r \\ -6 & - & 2r \\ 17 & + & -2r \\ 2 & + & -3r \\ -9 & + & -2r \end{array}$$

Dengan

$$\underline{x}_1 = 6 + 3r \ + \ i\,(13 + 2r)$$

$$\overline{x}_1 = 12 - 3r \ + \ i(17 - 2r)$$

$$\underline{x}_2 = -3 + 4r \ + \ i(-4 + 3r)$$

$$\overline{x}_2 = 5 - 4r \ + \ i(2 - 3r)$$

$$\underline{x}_3 = -10 + 2r \ + \ i(-13 + 2r)$$

$$\overline{x}_3 = -6 - 2r \ + \ i(-9 - 2r)$$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 = 6 + 3r, 12 - 3r \ + \ i(13 + 2r, 17 - 2r)$$

$$\tilde{x}_2 = -3 + 4r, 5 - 4r \ + \ i(-4 + 3r, 2 - 3r)$$

$$\tilde{x}_3 = -10 + 2r, -6 - 2r \ + \ i(-13 + 2r, -9 - 2r)$$

Berdasarkan landasan teori pada bab II untuk mencari apakah solusi nilai $\tilde{x}$ yang diperoleh adalah solusi *fuzzy* kuat atau solusi *fuzzy* lemah, maka diperoleh:

$$\underline{u}_1(r) = \min\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\}$$

$$= \min\left\{\begin{array}{c}(6+3r) + i(13+2r),\\ (12-3r) + i(17-2r),\\ (9+15i), (9+15i)\end{array}\right\}$$

$$= (6+3r) + i(13+2r)$$

$$\underline{u}_1(r) = \underline{x}_1(r)$$

$$\overline{u}_1(r) = \text{maks}\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\}$$

$$= \text{maks}\left\{\begin{array}{c}(6+3r) + i(13+2r),\\ (12-3r) + i(17-2r),\\ (9+15i), (9+15i)\end{array}\right\}$$

$$\overline{u}_1(r) = (12-3r) + i(17-2r)$$

$$\overline{u}_1(r) = \overline{x}_1(r)$$

$$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(1)\}$$

$$= \min\left\{\begin{array}{c}(-3+4r) + i(-4+3r),\\ (5-4r) + i(2-3r),\\ (1-i), (1-i)\end{array}\right\}$$

$$= (-3+4r) + i(-4+3r)$$

$$\underline{u}_2(r) = \underline{x}_2(r)$$

$$\overline{u}_2(r) = \text{maks}\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(1)\}$$

$$= \min\left\{\begin{array}{c}(-3+4r) + i(-4+3r),\\ (5-4r) + i(2-3r),\\ (1-i), (1-i)\end{array}\right\}$$

$$= (5-4r) + i(2-3r)$$

$$\overline{u}_2(r) = \overline{x}_2(r)$$

$$\underline{u}_3(r) = \min\{\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r), \underline{x}_3(1), \overline{x}_3(1)\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} (-10+2r)+i(-13+2r), \\ (-6-2r)+i(-9-2r), \\ (-8-11i), \quad (-8-11i) \end{matrix}\right\}$$

$$= (-10+2r)+i(-13+2r)$$

$$\underline{u}_3(r) = \underline{x}_3(r)$$

$$\overline{u}_3(r) = \text{maks}\{\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r), \underline{x}_3(1), \overline{x}_3(1)\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} (-10+2r)+i(-13+2r), \\ (-6-2r)+i(-9-2r), \\ (-8-11i), \quad (-8-11i) \end{matrix}\right\}$$

$$= (-6-2r)+i(-9-2r)$$

$$\overline{u}_3(r) = \overline{x}_3(r)$$

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks maka diperoleh:

$$\tilde{x}_1 = (6+3r, 12-3r) + i(13+2r, 17-2r)$$

$$\tilde{x}_2 = (-3+4r, 5-4r) + i(-4+3r, 2-3r)$$

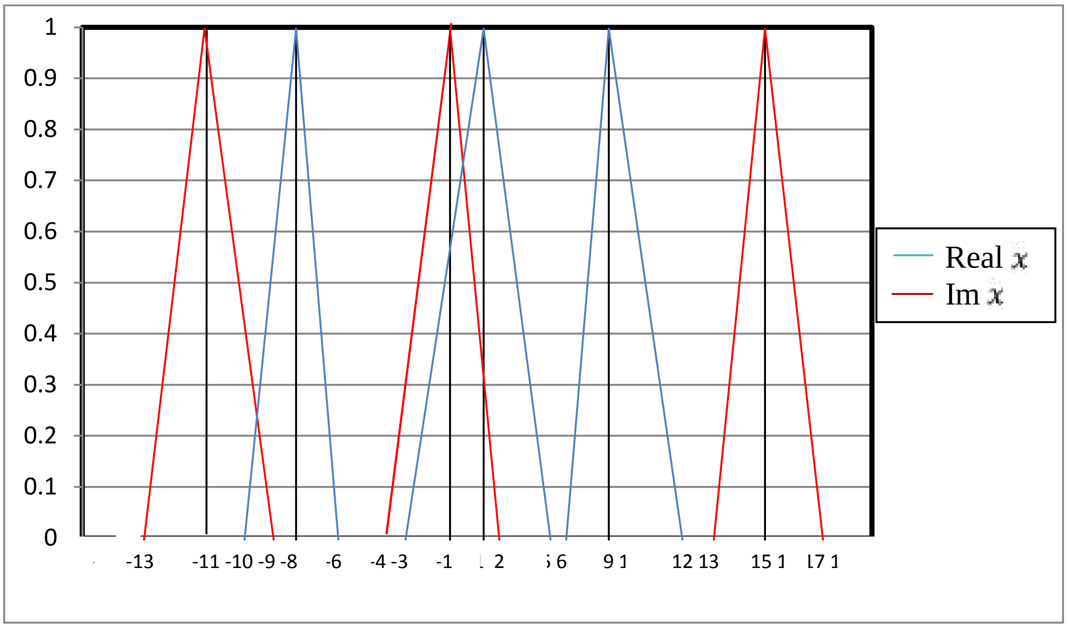
$$\tilde{x}_3 = (-10+2r, -6-2r) + i(-13+2r, -9-2r)$$

dengan $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$, sehingga solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks ini adalah solusi kuat. Berdasarkan persamaan (2.3) solusi sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks ini dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 = (6, 9, 12) + i(13, 15, 17)$$

$$\tilde{x}_2 = (-3, 1, 5) + i(-4, -1, 2)$$

$$\tilde{x}_3 = (-10, -8, -6) + i(-13, -11, -9)$$



Gambar 4.2 Solusi untuk sistem persamaan dari contoh 4.2

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, diperoleh hasil penelitian yaitu metode dekomposisi *QR* dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks dengan solusi yang diperoleh untuk contoh 4.1 adalah:

$$\tilde{x}_1 = \quad 0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r \quad + i(0.070777 + 0.03782r, 0.146428 - 0.03782r)$$

$$\tilde{x}_2 = \quad 0.034669 + 0.03073r, 0.096135 - 0.03073r \quad + i(-0.23795 + 0.03782r, -0.17648 - 0.03073r)$$

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linear *fuzzy* kompleksnya maka diperoleh:

$$\tilde{u}_1 = \quad \underline{x}_1\ r\ , \overline{x}_1\ r$$

$$= \quad 0.316355 + 0.03782r, 0.392005 - 0.03782r \quad + i(0.07077 + 0.03782r, 0.146428 - 0.03782r)$$

$$\tilde{u}_2 = \quad \underline{x}_2\ r\ , \overline{x}_2\ r$$

$$= \quad 0.034669 + 0.03073r, 0.096135 - 0.03073r \quad + i(-0.23795 + 0.03073r, -0.17648 - 0.03073r)$$

dengan $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$, sehingga solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks ini adalah solusi kuat.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis menggunakan metode dekomposisi *QR* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks, diharapkan bagi pembaca yang berminat dapat menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *"Elementary Linear Algebra"*, Eighth Edition. John Wiley, New York. 2000.

Beta Norita, "*Sistem Persamaan Linear Fuzzy*". Vol. 11, No.2, Program Studi Ilmu Komputer, 9499, ISSN: 1410-8518, Agustus 2008, Semarang.

Lipschutz, Seymour, dan Marc Lars Lipson. *"Aljabar Linear Schaum's"*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta. 2006.

M. Matinfar, S. H. Nasseri and M. Shrabi, "*Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Householder Decomposition Method". Applied Mathematical Sciences*, Vol.2, No. 52, 2569-2575, 2008.

Seyed Hadi Nasseri, "*Fuzzy Linear Systems: A Decomposition Method and Some New Results*". Vol.5, No.17, Summer, 2008.

Susilo, Frans, SJ. "*Himpunan dan Logika Kabur Serta Aplikasinya"*, Edisi Ketiga. Graha Ilmu, Yogyakarta. 2006.

Sutojo, T. dkk. "*Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks"*. Andi, Yogyakarta. 2010.

Taher Rahgooy, dkk. "*Fuzzy Complex System of Linear Equations Applied to Circuit Analysis"*. Vol.1, No.5, December, 2009.